Solucionario Álgebra 4.°



PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 8) Unidad 1

Comunicación matemática

1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4. $E = \sqrt[3]{\dfrac{16}{\sqrt[3]{\dfrac{16}{\sqrt[3]{\dfrac{16}{\vdots}}}}}} = E$

Elevamos al cubo: $E^3 = \dfrac{16}{E} \Rightarrow E^4 = 16$

$E^4 = 2^4 \Rightarrow E = 2$

Clave E

5. $M = 64^{-2^{-1}} \wedge N = 27^{-3^{-1}}$

Piden: 2M + N

$= 2\left(64^{-2^{-1}}\right) + 27^{-3^{-1}}$

$= 2\left(64^{-\frac{1}{2}}\right) + 27^{-\frac{1}{3}}$

$= 2\left(\dfrac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= 2\left(\dfrac{1}{8}\right) + \dfrac{1}{3}$

$= \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{12}$ $\quad \therefore 24M + N = \dfrac{7}{12}$

Clave B

6. $K = \left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \dfrac{14}{9}\right]^1$

$K = \left[\dfrac{4}{9} + \dfrac{14}{9}\right] = \dfrac{18}{9}$ $\quad \therefore K = 2$

Clave D

7. $R = x^3y^2x^4y^3x^2y^2xy^3$

$R = x^{3+4+2+1}y^{2+3+2+3}$

$\therefore R = x^{10}y^{10} = (xy)^{10}$

Clave E

8. $E = \dfrac{a^{5a}}{a^{4a}} = a^{5a-4a} = a^a = 3$

$\therefore E = 3$

Clave D

Resolución de problemas

9. $E = n^{2-2a} = n^{-198}$

$\therefore$ a = 100

Clave C

10. $\dfrac{1}{x^{x(1+x^{1+x})}} + \dfrac{x^x}{1+x^{1+x}} = M$

$\dfrac{1}{x^{(1+x^{1+x})}}\left(\dfrac{1+x^{x+1}}{x}\right) = M$

$\therefore M = \sqrt[x]{x}$

Clave B

Nivel 2 (página 8) Unidad 1

Comunicación matemática

11.

12.

13.

Razonamiento y demostración

14. $\dfrac{21^x}{3^{x+2} - 3^{x+1} + 3^x}$

Descomponemos las bases:

$\dfrac{7^x.3^x}{3^x.3^2 - 3^x.3 + 3^x}$

Factorizamos 3^x del denominador:

$\dfrac{7^x.3^x}{3^x(3^2 - 3 + 1)} = \dfrac{7^x}{7} = 7^{x-1}$

Clave D

15. $L = 5^{2^{3^{0^{4^{5^6}}}}} = 5^{2^{3^0}} = 5^2 = 25$

$\therefore$ L = 25

Clave D

16. $M = \dfrac{2^x}{3^x}\cdot\left(\dfrac{3^2}{2^2}\right)^{2x}\cdot\left(\dfrac{2^3}{3^3}\right)^x = \dfrac{2^x}{3^x}\cdot\dfrac{3^{4x}.2^{3x}}{2^{4x}.3^{3x}}$

$\therefore M = \dfrac{2^{4x}.3^{4x}}{3^{4x}.2^{4x}} = 1$

Clave A

17. $\dfrac{M}{N} = \dfrac{2^{2-x}.2^{3-x}.2^{2x-4}}{2^{6x+2}.2^{2-4x}.2^{-7-2x}}$

$\dfrac{M}{N} = 2^{2-x+3-x+2x-4-6x-2-2+4x+7+2x}$

$\dfrac{M}{N} = 2^4 = 16$ $\quad \therefore \dfrac{M}{N} = 16$

Clave E

18. $N = \dfrac{7^{4n+19}}{7^{3n-1}.7^{n+20}}$

$N = 7^{4n+19-3n+1-n-20}$

$N = 7^0 = 1$ $\quad \therefore N = 1$

Clave E

19. $A = \sqrt[9]{\dfrac{1+5^3+5^6+5^9}{1+\dfrac{1}{125}+\dfrac{1}{125^2}+\dfrac{1}{125^3}}}$

$A = \sqrt[9]{\dfrac{1+5^3+5^6+5^9}{1+\dfrac{1}{5^3}+\dfrac{1}{5^6}+\dfrac{1}{5^9}}}$

$A = \sqrt[9]{\dfrac{1+5^3+5^6+5^9}{\dfrac{5^9+5^6+5^3+1}{5^9}}} = \sqrt[9]{5^9}$

$\therefore$ A = 5

Clave E

Resolución de problemas

20.

$P = \dfrac{[(y^3)^{-2}]^{-4}}{y(y^{-3})^{-3}.\,y^{(-2)^4}}$

$P = \dfrac{y^{(-6)(-4)}}{y.y^9.y^{16}} = \dfrac{y^{24}}{y^{26}} = y^{-2}$

$\therefore$ El exponente final de y es: –2

Clave A

21. $M = \sqrt{x^{x^{x+2}}.x^{-x^{x+2}}} = 1$

Clave E

22. $E = \left(x^{n^{2n}-n^n}\right)^{n^{-n}} = x^{n^n-1}$

Clave D

23. **Por dato.** R_i = 120 050 insectos.

En el modelo exponencial:

$120\,050 = 350(7)^{0,03t}$

$7^3 = 7^{0,03t}$

Igualamos exponentes:

3 = 0,03t

$\therefore$ t = 100 días

Clave D

Nivel 3 (página 9) Unidad 1

Comunicación matemática

24.

25.

Razonamiento y demostración

26. $\dfrac{a^{3m}+a^{2m}+a^m}{a^m+a^{-m}+1} : \dfrac{a^{3m}+1}{a^{2m}+a^{-m}}$

Invirtiendo las bases con exponente negativo:

$\dfrac{a^{3m}+a^{2m}+a^m}{a^m+\dfrac{1}{a^m}+1} : \dfrac{a^{3m}+1}{a^{2m}+\dfrac{1}{a^m}}$

Dando mínimo común:

$\dfrac{a^{3m}+a^{2m}+a^m}{\dfrac{a^{2m}+1+a^m}{a^m}} : \dfrac{a^{3m}+1}{\dfrac{a^{3m}+1}{a^m}}$

Factorizamos a^m en el numerador:

$\dfrac{a^m.a^m(a^{2m}+a^m+1)}{a^{2m}+a^m+1} : \dfrac{a^m(a^{3m}+1)}{a^{3m}+1}$

Reduciendo tenemos: $a^{2m} : a^m = \dfrac{a^{2m}}{a^m} = a^m$

Clave C

27. Dato: $x^x = 2$

Nos piden: $S = x^{x^2} + x^{x+x^2}$

Dando forma:

$S = x^{x \cdot x} + x^x \cdot x^{x^2}$

$S = (x^x)^x + x^x \cdot (x^x)^x$

Reemplazamos el dato:

$S = 2^x + 2 \cdot 2^x = 3 \cdot 2^x$

$\therefore\ S = 3 \cdot 2^x$

Clave E

28. $N = \left(\frac{7^2}{7^3}\right)^x \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^{3x} \cdot \left(\frac{5^3}{7^2}\right)^x$

$\therefore\quad N = \frac{7^{2x}}{7^{3x}} \cdot \frac{7^{3x}}{5^{3x}} \cdot \frac{5^{3x}}{7^{2x}} = 1$

Clave C

29. $A = \dfrac{\sqrt[4]{x^1 \cdot \sqrt[3]{x^1 \cdot \sqrt{x^1}}}}{\sqrt[4]{\dfrac{x}{\sqrt[3]{\dfrac{x}{\sqrt{x}}}}}} = \dfrac{x^{\frac{(1.3+1)2+1}{4.3.2}}}{\sqrt[4]{\dfrac{x}{\sqrt[6]{x}}}}$

$A = \dfrac{x^{\frac{3}{8}}}{\sqrt[4]{x^{\frac{5}{6}}}} = \dfrac{x^{\frac{3}{8}}}{x^{\frac{5}{24}}} = x^{\frac{3}{8} - \frac{5}{24}}$

$\Rightarrow A = x^{\frac{4}{24}} = \sqrt[6]{x}$

Piden:

$$\left\{\left\{\left[\frac{\sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}}}{\sqrt[4]{x : \sqrt[3]{x : \sqrt{x}}}}\right]^3\right\}^2\right\}^2 = \left[\sqrt[6]{x}\right]^{3 \cdot 2 \cdot 2} = x^2$$

Clave C

30. $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4}}{4}}}{2}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4}}{4}}}{2}}$

$= \sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}{2}} = \sqrt{\dfrac{\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}}$

$\therefore\ \sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{\frac{1}{16}}}{4}}}{2}} = \dfrac{1}{2} = 2^{-1}$ ← exponente final

Clave A

31. $R = \left[\sqrt[x^{x+1}]{\left(x^{x^{x^{5x}}} \cdot x\right)}\right]^{x^{x-(x^x)^5}}$

$R = \left[\sqrt[x^x \cdot x]{x^{x^{x^{5x}}} \cdot x}\right]^{\frac{x^x}{x^{x^{5x}}}}$

$\therefore R = \left[\sqrt[x]{(x^x)}\right] = x$

Clave B

Resolución de problemas

32. Nos dicen:

$m_{(t)} = m_o \cdot e^{kt}$ ...(i)

Luego de 103 años habrá la mitad de lo que había, es decir:

m_o → t = 103 años → $\frac{m_o}{2}$

En el modelo presentado:

$\frac{m_o}{2} = m_o e^{k(103)} \Rightarrow 2^{-\frac{1}{103}} = e^k$ ...(ii)

(ii) en (i):

$m(t) = m_o\left(e^k\right)^t$

$m(t) = m_o\left(2^{-\frac{1}{103}}\right)^t$

$m(t) = m_o 2^{-\frac{t}{103}}$ ...(iii)

Del enunciado:

$t = ? \Rightarrow m_f = m(t) = \frac{1}{8} m_o$ ...(iv)

(iv) en (iii):

$\frac{1}{8} m_o = m_o 2^{-\frac{t}{103}}$

$2^{-3} = 2^{-\frac{t}{103}}$

Igualamos exponentes:

$-3 = -\frac{t}{103}$

$t = 309$ años

$\therefore$ Luego de 309 años la masa final será la octava parte de la masa inicial.

Clave C

33. Dando una forma adecuada al modelo:

$\frac{P_o}{P} = 3^{\frac{H}{30T+8000}}$

Tenemos como dato:

$P_0 = 75{,}87$ cm Hg

$P = 2{,}81$ cm Hg

$T = -5$ºC

Reemplazamos en (1):

$\frac{75{,}87\text{cmHg}}{2{,}81\text{cmHg}} = 3^{\frac{H}{30(-5)+8000}}$

$3^3 = 3^{\frac{H}{7850}}$

Igualamos los exponentes:

$3 = \frac{H}{7850}$

$\therefore\ H = 23\,550$ m

Clave C

POLINOMIOS

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 12) Unidad 1

Comunicación matemática

1. a) 2

1. $P(x;y) = x^5y^5 - 3x^2y^8 + 2x^6y^4$
2. $P(x;y;z) = 3xy^2z^7 + 2x^2y^2z^6 + 151x^7yz^2 + 3z^{10}$

b) 1

1. $P(x;y) = x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + 2xy^4 + 21y^5$

c) 1

1. $P(x;y) = 3y + xy + 10x^3y^2 + 2x^2 + 7x^4y^3$

d) 2

1. $P(x) = x^{100} + x^{80} + x^{70} + x^{30} + 1$
2. $P(y) = 1 + y^3 + y^5 + y^7 + y^{10}$

e) 2.

1. $ax^7 + bx^5 + cx^2 + dx + e \equiv 0$
2. $ax^2 + bx + 1 \equiv 0$

2. 1. Ordenado
2. Homogéneo
3. Completo

Razonamiento y demostración

3. $Q(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 1$

$Q(-2) = 2(-2)^3 - 4(-2)^2 - (-2) + 1$

$Q(-2) = -16 - 16 + 2 + 1 = -29$

Clave E

4. $P(7) = 7^{2004} - 7 \,.\, 7^{2003} + 7 \,.\, 7 + 1$

$P(7) = 7^{2004} - 7^{2004} + 49 + 1$

$\therefore\ P(7) = 50$

Clave C

5. $P(x - 8) = x^3 + x^2 + x$

Piden: $P(-5)$

Entonces: $x - 8 = -5 \Rightarrow x = 3$

Por lo tanto: $P(-5) = 3^3 + 3^2 + 3 = 39$

Clave D

6. $P(x) = x^{1996} - 5x^{1995} + 2$

Sea $x = 5$

$P(5) = 5^{1996} - 5 \,.\, 5^{1995} + 2$

$P(5) = 5^{1996} - 5^{1996} + 2 = 2$

Nos piden: $P(5) - 3 = 2 - 3 = -1$

Clave D

7. $P(x + 1) = 3x + 1$

Sea $x = 1 \Rightarrow P(2) = 3(1) + 1 = 4$

$Q(2x - 1) = x^2$

Sea $x = 3 \Rightarrow Q(5) = 3^2 = 9$

Nos piden: $3P(2) + Q(5) = 3(4) + 9 = 21$

Clave B

8. $P(x + 1) = x^2 + 1$

Sea:

$x = -1 \Rightarrow P(0) = (-1)^2 + 1 = 2$

$x = 0 \Rightarrow P(1) = 0^2 + 1 = 1$

$x = 1 \Rightarrow P(2) = 1^2 + 1 = 2$

Nos piden:

$$\frac{P(0) + P(1)}{P(2)} = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2}$$

Clave D

9. $P(x) + P(-x) = x^5 + 5x^3 + 3 + (-x)^5 + 5(-x)^3 + 3$

$\Rightarrow P(x) + P(-x) = x^5 + 5x^3 + 3 - x^5 - 5 \,.\, x^3 + 3$

$\therefore\ P(x) + P(-x) = 6$

Clave A

10. $P(x) = x^{2n-7} - x^{2n-9} + 2x^{2n-12}$

$GA(P) = 2n - 7$

Clave B

11. $P(x;\, y) = 2x^ny^{4m+3} - 7x^{2n}y^{2m-3} + x^{n-1}y^{4m}$

$GR(y) = 4m + 3 = 23 \Rightarrow m = 5$

Clave A

12. $(3a + 2b)x^2 + (5a - 6b) \equiv 3x^2 - 7$

Como son idénticos se cumple:

$3a + 2b = 3$

$5a - 6b = -7$

Sumando:

$8a - 4b = -4$

Clave D

13. $P(x) = 6x - 5$

Sea:

$x = 0 \Rightarrow P(0) = 6(0) - 5 = -5$

$x = 1 \Rightarrow P(1) = 6(1) - 5 = 1$

$x = 2 \Rightarrow P(2) = 6(2) - 5 = 7$

Nos piden:

$$\frac{P(0) + P(1) + P(2)}{3} = \frac{-5 + 1 + 7}{3} = 1$$

Clave A

14. $P(x) = x^2 - 3x + 1$

$$E = \frac{P(-2) + P(-1)}{P(4) - P(3)}$$

$$E = \frac{(-2)^2 - 3(-2) + 1 + (-1)^2 - 3(-1) + 1}{(4)^2 - 3(4) + 1 - (3)^2 + 3(3) - 1}$$

$$E = \frac{4 + 6 + 1 + 1 + 3 + 1}{16 - 12 + 1 - 9 + 9 - 1} = \frac{16}{4} = 4$$

Clave B

Resolución de problemas

15. Por ser idénticos:

$(m + n)\,x + 2mn = 3x - 56$

$\left.\begin{matrix} m + n = 3 \\ mn = -28 \end{matrix}\right\}\ \begin{matrix} m = -4 \\ n = 7 \end{matrix}$ $\qquad \dfrac{m}{n} = -\dfrac{4}{7}$

Clave D

16. $P(x + 2) = 3(x + 2) + 2 = 3x + 8$

$P(x + 1) = 3(x + 1) + 2 = 3x + 5$

$\therefore\ P(x + 2) - P(x + 1) = 3$

Clave C

Nivel 2 (página 12) Unidad 1

Comunicación matemática

17. a. Trapecio
b. Homogéneo
c. 74
d. 16
e. 1

18.

19. a) $2p = y + z + z + x + x + y + x + x + z + z$

$2p = 4x + 2y + 4z$

b) Área $= S = x^2 + 2xy + yz$

c) Volumen $= V = \dfrac{x^2}{2} \,.\, y$

Razonamiento y demostración

20. $\underbrace{P(0)}_{2} = 0^2 + b(0) + c$

$2 = 0 + c \Rightarrow c = 2$

$\underbrace{P(1)}_{6} = 1 + b + 2 \Rightarrow b = 3$

$\Rightarrow P(x) = x^2 + 3x + 2$

$\therefore\ P(2) = 2^2 + 3(2) + 2 = 12$

Clave C

21. $P(x) = (m - 1)x^2 + mx + m + 1$

Dato: $P(2) = 4$

Sea $x = 2$:

$P(2) = (m - 1) \,.\, 2^2 + m(2) + m + 1 = 4$

$4(m - 1) + 3m + 1 = 4$

$4m - 4 + 3m + 1 = 4 \Rightarrow m = 1$

Clave A

22. $P(x) = 2x + a$ ...(I)

$R(x) = x - 2$ ...(II)

$P(R(1)) = 8$ ...(III)

De (II): $x = 1 \Rightarrow R(1) = 1 - 2 = -1$

Reemplazando en (III): $P(-1) = 8$

Luego en (I):

$x = -1 \Rightarrow P(-1) = 2(-1) + a = 8$

$\Rightarrow a = 10$

Clave B

23. $P(P(P(x))) = x^8$

$\Rightarrow P(x) = x^2$ ... (I)

$Q(Q(Q(x))) = x^{27}$

$\Rightarrow Q(x) = x^3$ ... (II)

Sea: $x = 8$ en (I):

$P(8) = 8^2 = 64$

Sea: $x = -4$ en (II):

$Q(-4) = (-4)^3 = -64$

Nos piden: $P(8) + Q(-4) = 64 - 64 = 0$

Clave D

24. $P(x) = 2x + 3$

Hacemos:

$x \to x + 2 \Rightarrow P(x + 2) = 2(x + 2) + 3$

$P(x + 2) = 2x + 7$

$x \to x - 2 \Rightarrow P(x - 2) = 2(x - 2) + 3$

$P(x - 2) = 2x - 1$

Nos piden:

$P(x + 2) + P(x - 2) = 4x + 6$

Clave C

25. $P(x-2) = x^2 - 4$

Hacemos $x \to x + 4$

Reemplazamos:

$P(x+4-2) = (x+4)^2 - 4$

$P(x+2) = x^2 + 8x + 16 - 4$

$P(x+2) = x^2 + 8x + 12$

Clave B

26. $P(x) = \sqrt{7}x^{2+m} + \sqrt{2}x^{3+m} + \sqrt{11}x^{4+m}$

Dato:

P(x) es de grado 7

Entonces:

$4 + m = 7 \Rightarrow m = 3$

Nos piden:

$m + 3 = 3 + 3 = 6$

Clave B

27. $6 + 24 + 60 + ... = 4290$

$1\times2\times3 + 2\times3\times4 + 3\times4\times5 + ... + n(n+1)(n+2) = 4290$

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} = 4290$$

$n(n+1)(n+2)(n+3) = 4 . 4290 = 10 . 11 . 12 . 13$

$\Rightarrow n = 10$

Clave E

28. $GR(y) = 2GR(x)$

$5m + 2 = 2(3m) \Rightarrow m = 2$

$\therefore\ GA(P) = 3m - 1 + 5m + 2$

$= 8m + 1 = 17$

Clave B

29. $\dfrac{GA(P)}{GA(Q)} = \dfrac{8}{3}$

$\dfrac{2m+6}{m+2} = \dfrac{8}{3} \Rightarrow 6m + 18 = 8m + 16$

$\Rightarrow m = 1$

$\therefore\ GR(x) = 2m + 6 = 2(1) + 6 = 8$

Clave B

30. $GR(x) = 12$

$\Rightarrow m + 3 = 12 \Rightarrow m = 9$

$GA(P) = 18$

$\Rightarrow\ m + n + 4 = 18$

$9 + n + 4 = 18 \Rightarrow n = 5$

$\therefore GR(y) = n + 2 = 7$

Clave B

31. $\sqrt[a.b]{\dfrac{x^a}{y^b}} \cdot \sqrt[bc]{\dfrac{y^b}{x^c}} \cdot \sqrt[ac]{\dfrac{z^c}{x^a}}$

$$\frac{\sqrt[b]{x}}{\sqrt[a]{y}} \cdot \frac{\sqrt[c]{y}}{\sqrt[b]{x}} \cdot \frac{\sqrt[a]{z}}{\sqrt[c]{x}} = \frac{\sqrt[c]{y}\sqrt[a]{z}}{\sqrt[a]{y}\sqrt[c]{x}}$$

$$= \frac{y^{\frac{1}{c}}.z^{\frac{1}{a}}}{y^{\frac{1}{a}} \cdot x^{\frac{1}{c}}} = x^{\frac{-1}{c}}.y^{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}.z^{\frac{1}{a}}$$

$\therefore$ Grado $= \dfrac{-1}{c} + \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a} = 0$

Clave E

32. $P(x) = x^a + x^b + x^c$

Por dato, P es de grado cinco y $c > b > a$, entonces: $c = 5$

Nos piden: $c + 2 = 5 + 2 = 7$

Clave A

33. $P(x) = x + 1$

$$\frac{P(x+1) + P(x-1)}{P(x)} = \frac{x+1+1+x-1+1}{x+1}$$

$$= \frac{2x+2}{x+1} = \frac{2(x+1)}{(x+1)} = 2$$

Clave C

Resolución de problemas

34. Un polinomio se caracteriza por poseer exponentes naturales y dado por la homogeneidad, establecemos:

$$\frac{s}{r} + 7n = \frac{t}{s} + 5m = \frac{r}{t} + 2p$$

Menor grado, se cumple cuando:

$r = s = t$

$\Rightarrow 7n = 5m = 2p$

$\Rightarrow$ mcm (7;5;2) = 70

$\Rightarrow n = 10;\ m = 14;\ p = 35$

$(n + m + p) = 59$

Clave A

35. Sea el nuevo polinomio homogéneo:

$H(x,y) = 7x^5 + mx^4y + 5x^3y^2 + 10x^2y^3 + nxy^4 + y^5$

Según datos:

$\sum$coef. $H = 36 \Rightarrow 7 + m + 5 + 10 + n + 1 = 36$

$m + n = 13$ ...(i)

- $VN(H) = 21 \Rightarrow$ cuando $x = -2$; $y = 1$

  $7(-2)^5 + m(-2)^4(1) + 5(-2)^3(1)^2 + 10(-2)^2(1)^3 + n(-2)(1)^4 + (1)^5 = 21$

  $8m - n = 122$ ...(ii)

De (i) y (ii): $m = 15$ y $n = -2$

El polinomio agregado es: $15x^4y - 2xy^4$

Clave C

36. $T(T(z)) = c(T(z))^2 + d = c(cz^2 + d)^2 + d$

$27z^4 + 108z^2 + e = c^3z^4 + 2c^2dz^2 + (cd^2 + d)$

Idénticos coeficientes:

$c^3 = 27$; $\quad 2c^2d = 108$; $\quad cd^2 + d = e$

$c = 3$; $\quad d = 6$; $\quad e = 114$

$\Rightarrow c + d + e = 3 + 6 + 114 = 123$

Clave A

Nivel 3 (página 14) Unidad 1

Comunicación matemática

37. C

38.

Razonamiento y demostración

39. $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{10} f(i) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right)$$

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{10} f(i) = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$$

Clave D

40. $P\Big(\underbrace{\frac{1}{x} + 1}_{y}\Big) = x + 1$

$\dfrac{1}{x} + 1 = y$

$\dfrac{1}{x} = y - 1$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{y-1}$

$P(y) = \dfrac{1}{y-1} + 1$

Luego:

$P(2) = 2;\ P(3) = \dfrac{3}{2} \wedge P(4) = \dfrac{4}{3}$

$\therefore P(2) - P(3) - P(4) = -\dfrac{5}{6}$

Clave B

41. $P(x) = 2x$

Sea:

$x = 1 \Rightarrow P(1) = 2 \times 1$

$x = 2 \Rightarrow P(2) = 2 \times 2$

$x = 3 \Rightarrow P(3) = 2 \times 3$

$\vdots$

$x = 30 \Rightarrow P(30) = 2 \times 30$

Sumamos:

$P(1) + P(2) + P(3) + ... + P(30) = 2(1 + 2 + 3 + ... + 30)$

$P(1) + P(2) + ... + P(30) = \dfrac{2.30.31}{2}$

$P(1) + P(2) + ... + P(30) = 930$

Clave D

42. $P(x) = 2x^{99} - 64x^{94} + x - 5$

$x = 2 \Rightarrow P(2) = 2.2^{99} - 2^6.\,2^{94} + 2 - 5$

$P(2) = 2^{100} - 2^{100} - 3 = -3$

Si $x = -1$

$\Rightarrow P(-1) = 2(-1)^{99} - 64(-1)^{94} + (-1) - 5$

$P(-1) = -2 - 64 - 1 - 5 = -72$

Si $x = 1$

$\Rightarrow P(1) = 2(1)^{99} - 64(1)^{94} + 1 - 5$

$P(1) = 2 - 64 + 1 - 5 = -66$

Nos piden:

$E = P(2) + P(-1) + P(1)$

$E = -3 - 72 - 66 = -141$

Clave A

43. $P(x+5) = 3x - 2$ ... (I)

$P(2x+m) = 6x + 7$ ... (II)

Cambiamos x por $x - 5$ en (I):

$P(x - 5 + 5) = 3(x - 5) - 2$

$\Rightarrow P(x) = 3x - 17$ ... (III)

Cambiamos x por $2x + m$ en (III):

$P(2x + m) = 3(2x + m) - 17$

$P(2x + m) = 6x + 3m - 17$ ... (IV)

Se observa que (IV) = (II)

$3m - 17 = 7 \Rightarrow 3m = 24$

$m = 8$

Clave E

44. $f\left(\dfrac{1}{x}+2\right)=x$

Sea:

$x=1 \Rightarrow f(1+2)=1 \Rightarrow f(3)=1$

$x=\dfrac{1}{3} \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{\frac{1}{3}}+2\right)=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow f(5)=\dfrac{1}{3}$

$x=\dfrac{1}{5} \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{\frac{1}{5}}+2\right)=\dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow f(7)=\dfrac{1}{5}$

Nos piden:

$f(3)^{f(5)^{f(7)}}=1^{\frac{1}{3}^{\frac{1}{5}}}=1$

Clave C

45. Determinamos el valor de a:

$a-5\geq 0$ $\quad \dfrac{a}{4}\in \mathbb{N}$ $\quad 11-a\geq 0$

$a\geq 5$ $\quad a=\overset{\circ}{4}$ $\quad 11\geq a$

$\Rightarrow a=8$

$GA(P)=a-5+\dfrac{a}{2}+1$

$=8-5+\dfrac{8}{2}+1=8$

Clave B

46. $Q=x^my^{2n+1}z[x^{m-1}yz^{n-1}+(xy)^mz^n]$

$Q=x^{m+m-1}y^{2n+1+1}z^{1+n-1}$

$+x^{m+m}y^{2n+1+m}z^{n+1}$

$Q=x^{2m-1}y^{2n+2}z^n+x^{2m}y^{2n+m+1}z^{n+1}$

$GA(Q)=3m+3n+2=17$

$\Rightarrow m+n=5$ ...(1)

$GR(y)=2n+m+1=9$

$2n+m=8$ ...(2)

De (1) y (2):

$n=3 \wedge m=2$

Entonces: $n-m=3-2=1$

Clave C

47. $M(x,y)=x^3y^b(x^{-2}y)^{-a}y^4$

Reducimos:

$M(x,y)=x^{3+2a}.y^{b-a+4}$

Dato:

$GR(x)=3+2a=13$

$a=5$

$GA(M)=a+b+7=18$

$a+b=11$

$\downarrow$

$5+b=11 \Rightarrow b=6$

Nos piden:

$ab=5.6=30$

Clave C

Resolución de problemas

48. $\underbrace{(2a+3)^b b^{3a}}_{A}=\underbrace{(2a-3)^a b^{6b}}_{B}=\underbrace{b^{3a+6b}}_{C}$

De A y C:

$(2a+3)^bb^{3a}=b^{3a+6b}$

$2a+3=(b^3)^2$ ...(i)

De B y C: $(2a-3)^ab^{6b}=b^{3a+6b}$

$2a-3=b^3$ ...(ii)

(ii) en (i):

$2a+3=(2a-3)^2$

$4a^2-14a+6=0$

$(2a-1)(2a-6)=0$

$a=\dfrac{1}{2}$ ✗ $\wedge$ $a=3$ ✓

En (i):

$b^3=3$

$\lambda=\sqrt[3]{(3^3)^3}=27$

Clave B

49. Según su regla de formación:

$P(x)=(x+1)(x^2+2)(x^3+3)...(x^n+n)$

$TI(P)=P(o)=1.2.3....n=n!$

$5040=7!=n!$

$n=7$

$GP=1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{7(7+1)}{2}$

$GP=28$

Clave C

50. El problema no especifica si los exponentes aumentan o disminuyen, por consiguiente analizamos solo 2 casos:

Caso I: Exponentes de la variable aumentan

$E(x)=px^{m+n}+rx^{n+p}+mx^{p+q}+nx^{q+r}$

$+qx^{r+121}$

Luego:

$m+n=0$; $n+p=1$; $p+q=2$;

$q+r=3$; $r+121=4$

$m=-119$ $\quad n=119$ $\quad p=-118$

$q=120$ $\quad r=-117$

La suma de coeficientes ($\sum$coef.) se determina como:

$\sum Coef.(E)=E(1)=p+r+m+n+q$

$\sum Coef.(E)=-118-117-119+119+120$

$=-115$

$\sum Coef.(E)=-115$

Caso II. Exponentes de la variable disminuyen

$E(x)=px^{m+n}+rx^{n+p}+mx^{p+q}+nx^{q+r}$

$+qx^{r+121}$

Luego:

$m+n=4$; $n+p=3$; $p+q=2$;

$q+r=1$; $r+121=0$

$m=-119$ $\quad n=123$ $\quad p=-120$

$q=122$ $\quad r=-121$

$\sum Coef(E)=E(1)$

$=-120-121-119+123+122$

$\sum Coef(E)=-115$

Se concluye de los dos casos (ya sea cuando sus exponentes aumentan o disminuyen) que se obtiene el mismo resultado.

$\therefore \sum Coef.=-115$

Clave B

51. Como está ordenado en forma ascendente, se plantea la siguiente relación de exponentes:

$7-2a<3a-2<9-2a$

Sumamos "2a"

$7<5a-2<9$

Sumamos"2":

$9<5a<11$

El único valor entero que satisface la relación es:

$a=2$

$\Rightarrow G(R)=9-2a=9-2(2)=5$

Clave C

52. Como nos dice que el polinomio se anula para más de 2 valores, es por esto que el polinomio es idénticamente nulo.

Operamos y agrupamos términos semejantes:

$I(x)=bcx^4+b^7x^2+7x^2-21x^4-7+c^7x^2$

$+7abcx^2-a$

$I(x)=(bc-21)x^4+(b^7+c^7+7abc+7)x^2$

$-(a+7)\equiv 0$

$bc-21=0 \Rightarrow bc=21$ ...(1)

$b^7+c^7+7abc+7=0$ ...(2)

$a+7=0 \Rightarrow a=-7$ ...(3)

(1) x (3) miembro a miembro:

$abc=-147$ ...(4)

Reemplazamos (4) en (2)

$b^7+c^7+7(-147)+7=0$

$b^7+c^7=7(146)$ ...(5)

Dividimos (5) ÷ (1):

$\dfrac{b^7+c^7}{bc}=\dfrac{7(146)}{21}=\dfrac{146}{3}=\dfrac{b^6}{c}+\dfrac{c^6}{b}$

Multiplicamos por 3 miembro a miembro:

$\underbrace{\dfrac{3b^6}{c}+\dfrac{3b^6}{b}}=3\left(\dfrac{146}{3}\right)$

$\therefore J=146$

Clave D

53. $z=0 \Rightarrow 0=e(-2)^3+f(-2)^2+h+g(0-2)$

$0=-8e+4f+h-2g$ ...(1)

$z=-1 \Rightarrow 0=e(-3)^3+f(-3)^2+g(-3)+h$

$0=-27e+9f-3g+h$ ...(2)

$z=-2 \Rightarrow 0=e(-4)^3+f(-4)^2+g(-4)+h$

$0=-64e+16f-4g+h$ ...(3)

$z=2 \Rightarrow (2)(3)(4)=h \Rightarrow h=24$

h en (1),(2) y (3):

$\left.\begin{array}{l}4e-2f+g=12\\9e-3f+g=8\\16e-4f+g=6\end{array}\right\}\begin{array}{l}e=1\\f=9\\g=26\end{array}$

$h+e+f+g=60$

Clave A

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 18) Unidad 1

Comunicación matemática

1.

Clave D

2. No tiene pareja:

$(a+b)^2+(a-b)^2 \equiv 2(a^2+b^2)$

Aparece tres veces:

$(a+b)(a^2-ab+b^2) \equiv a^3+b^3$

Razonamiento y demostración

3. Dato: $m^2+\dfrac{1}{m^2}=2$

$m^4+1=2m^2 \Rightarrow m^4-2m^2+1=0$

$(m^2-1)^2=0 \;\Rightarrow\; m^2-1=0$

$m^2=1$

Nos piden:

$\dfrac{m^{12}+1}{3m^6}=\dfrac{(m^2)^6+1}{3(m^2)^3}=\dfrac{1^6+1}{3(1)^3}=\dfrac{2}{3}$

Clave D

4. $R=(x+3)(x^2-3x+9)(x-3)(x^2+3x+9)+729$

En la expresión, encontramos suma y diferencia de cubos:

$R=(x^3+3^3)(x^3-3^3)+729$

$R=x^6-3^6+729$

$R=x^6-729+729$

$\therefore R=x^6$

Clave A

5. $E=(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}-1)$

$E=(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$

$E=(\sqrt{3}^2-1^2)(\sqrt{2}^2-1^2)$

$E=(3-1)(2-1)$

$\therefore E=2$

Clave A

6. $S=\dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^3+b^3}$

Recuerda:

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

Luego:

$S=\dfrac{a^3+b^3}{a^3+b^3}=1 \qquad \therefore S=1$

Clave B

7. $R=\dfrac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^3-b^3}$

Recuerda:

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

Luego:

$R=\dfrac{a^3-b^3}{a^3-b^3}=1 \qquad \therefore R=1$

Clave A

8. Como:

$x^2+y^2+z^2=xy+xz+zy$

$\Rightarrow x=y=z$

$\therefore \dfrac{x^3+y^3}{z^3}=\dfrac{x^3+x^3}{x^3}=2$

Clave B

9. $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$

Elevamos al cuadrado:

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=\sqrt{5}^2$

$x^2+2x\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=5$

$\therefore x^2+\dfrac{1}{x^2}=5-2=3$

Clave E

10. Dato: $x+\dfrac{1}{x}=2$

$\Rightarrow \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=2^2$

$\Rightarrow x^2+\underbrace{2x.\dfrac{1}{x}}_{2}+\dfrac{1}{x^2}=4$

$\therefore x^2+\dfrac{1}{x^2}=2$

Clave C

11. $H=\dfrac{(5x)^2+2.5x.3y+(3y)^2-((5x)^2-2.5x.3y+(3y)^2)}{12xy}$

$H=\dfrac{25x^2+30xy+9y^2-25x^2+30xy-9y^2}{12xy}$

$H=\dfrac{60xy}{12xy}$

$\therefore H=5$

Clave C

Resolución de problemas

12. Dato:

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=2$

$a^2+b^2=2ab \Rightarrow a^2-2ab+b^2=0$

$\Rightarrow (a-b)^2=0 \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b$

Nos piden: $M=\dfrac{2a^2b+ab^2}{ab}$

Reemplazamos:

$\therefore M=\dfrac{2a^2a+aa^2}{a.a}=\dfrac{3a^3}{a^2}=3a$

Clave C

13. $S=(x+y+1)^3-(x+y)^3-3(x+y)(x+y+1)$

Sea:

$\left.\begin{array}{r} x+y+1=a \\ x+y=b \end{array}\right\}(-) \Rightarrow a-b=1$

Reemplazamos:

$S=a^3-b^3-3ab\,(1)$

$S=\underbrace{a^3-b^3-3ab\,(a-b)}$

$\therefore S=(a-b)^3=1^3=1$

Clave C

Nivel 2 (página 18) Unidad 1

Comunicación matemática

14. A: LEGENDRE

B: LAGRANGE

C: ARGAND

D: CUBO

E: CUADRADO

15. VFV

Razonamiento y demostración

16. $x+\dfrac{1}{x}=3 \Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$

Luego:

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2=7^2 \Rightarrow x^4+2x^2.\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}=49$

$\therefore x^4+\dfrac{1}{x^4}=47$

Clave B

17. $R=\sqrt[4]{35(6^2+1)(6^4+1)+1}$

$R=\sqrt[4]{(6^2-1)(6^2+1)(6^4+1)+1}$

$R=\sqrt[4]{6^8-1+1}=\sqrt[4]{6^8}$

$R=6^2=36$

$\therefore R=36$

Clave B

18. $S=\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-64}}\,.\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-64}}$

$S=\sqrt[3]{\left(x+\sqrt{x^2-64}\right)\left(x-\sqrt{x^2-64}\right)}$

Aplicamos diferencia de cuadrados:

$S=\sqrt[3]{x^2-\left(\sqrt{x^2-64}\right)^2}$

$S=\sqrt[3]{x^2-x^2+64}=\sqrt[3]{64}$

$S=\sqrt[3]{4^3}=4$

$\therefore S=4$

Clave D

19. $S=(x^n+6)(x^n+4)-(x^n+3)(x^n+7)$

Desarrollamos las expresiones:

$S=x^{2n}+4x^n+6x^n+24-x^{2n}-3x^n-7x^n-21$

$\therefore S=3$

Clave A

20. Dato: $m + m^{-1} = 5$

Piden: $m^3 + m^{-3}$

Por identidad de Cauchy:

$$(m + m^{-1})^3 = m^3 + (m^{-1})^3 + 3m.m^{-1}(m + m^{-1})$$

$$(m + m^{-1})^3 = m^3 + m^{-3} + 3m.\frac{1}{m}(m + m^{-1})$$

$$(5)^3 = m^3 + m^{-3} + 3(5)$$

$$\therefore\ m^3 + m^{-3} = 125 - 15 = 110$$

Clave D

21. $E = \dfrac{(3x + 2y)^2 + (2x - 3y)^2}{(x + y)^2 + (x - y)^2}$

Desarrollamos:

$$E = \frac{9x^2 + 4y^2 + 12xy + 4x^2 + 9y^2 - 12xy}{2(x^2 + y^2)} =$$

$$E = \frac{13x^2 + 13y^2}{2(x^2 + y^2)} = \frac{13}{2}\frac{(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)}$$

$$\therefore\ E = \frac{13}{2}$$

Clave E

22. $P = \dfrac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}$

Por Legendre se tiene:

$$P = \frac{4\sqrt{6}\sqrt{2}}{2(\sqrt{5}^2 + \sqrt{3}^2)} = \frac{4\sqrt{12}}{2(5 + 3)}$$

$$\therefore\ P = \frac{4\sqrt{4.3}}{2.8} = \frac{4.2\sqrt{3}}{2.8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Clave E

23. Dato: $x^2 + x^{-2} = 3$

Piden: $x^6 + x^{-6} = (x^2)^3 + (x^{-2})^3$

Por identidad de Cauchy:

$$(x^2 + x^{-2})^3 = (x^2)^3 + (x^{-2})^3 + 3x^2x^{-2}(x^2 + x^{-2})$$

$$3^3 = x^6 + x^{-6} + 3x^2.\frac{1}{x^2}(3)$$

$$\therefore\ x^6 + x^{-6} = 27 - 9 = 18$$

Clave B

Resolución de problemas

24. $B = \dfrac{4(a + b)^2 - (a - b)^2}{(3a + b)(a + 3b)}$

$$B = \frac{3(a + b)^2 + (a + b)^2 - (a - b)^2}{3a^2 + 9ab + ab + 3b^2}$$

$$B = \frac{3(a + b)^2 + 4ab}{\underbrace{3a^2 + 6ab + 3b^2}_{3(a + b)^2} + 4ab}$$

$$B = \frac{3(a + b)^2 + 4ab}{3(a + b)^2 + 4ab} = 1 \quad \therefore\ B = 1$$

Clave E

25. Nos piden:

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Datos: $ab = 1$

$a + b = 4$

Elevamos al cuadrado:

$$(a + b)^2 = 4^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 16$$

$$a^2 + b^2 = 14$$

Reemplazamos en lo pedido:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$$

$$a^3 + b^3 = 4(14-1) = 4.13 = 52$$

Clave E

Nivel 3 (página 19) Unidad 1

Comunicación matemática

26. De: $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 + (a^2 + b^2 + c^2) = ab + ac + bc$

Se obtiene: $a = b = c$; a,b y $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ FVVF

27. 1. Sí

2. No

3. Sí

Razonamiento y demostración

28. Nos piden:

$$M = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2x.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \qquad ...(I)$$

Del dato:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (2)^2$$

$$x^2 + 2x.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 4$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 \qquad ...(II)$$

Reemplazando (II) en (I):

$M = 2 - 2$

$\therefore\ M = 0$

Clave A

29. Nos piden:

$$P = \frac{x^7 - x^5 + x^3}{x^5} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$P = x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 \qquad ...(I)$$

Del dato:

$$x^2 + 1 = 3x \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9$$

$$x^2 + 2x.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 9$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 \qquad ...(II)$$

Reemplazando (II) en (I):

$P = 7 - 1$

$\therefore\ P = 6$

Clave E

30. $E\ \dfrac{(3x)^2+2.3x.1+1^2+(3x)^2-2.3x.1+1^2}{2}-9x^2$

$E=\dfrac{9x^2+6x+1+9x^2-6x+1}{2}-9x^2$

$E=\dfrac{18x^2+2}{2}-9x^2$

$E=9x^2+1-9x^2$

$\therefore\ E=1$

Clave A

31. $E=\underbrace{(x+1)(x-1)}_{(x^2-1)}(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$

$(x^2-1)(x^2+1) = (x^4-1)$

$(x^4-1)(x^4+1) = (x^8-1)$

$(x^8-1)(x^8+1) = (x^{16}-1)$

$\therefore E=x^{16}-1$

Clave A

32. $A=\dfrac{(2x)^2-1^2}{2x+1}-\dfrac{(3x)^2-1^2}{3x+1}$

$A=\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{(2x+1)}-\dfrac{(3x-1)(3x+1)}{(3x+1)}$

$A=2x-1-(3x-1)$

$A=2x-1-3x+1$

$\therefore A=-x$

Clave D

33. Aplicamos diferencia de cuadrados:

$E=\underbrace{(a+5)(a-5)}_{(a^2-5^2)}(a^2+5^2)(a^4+5^4)-a^8$

$(a^2-5^2)(a^2+5^2) = (a^4-5^4)$

$(a^4-5^4)(a^4+5^4) = (a^8-5^8)$

$E=a^8-5^8-a^8=-5^8$

$\therefore\ E=-5^8$

Clave B

34. $M=(x+2y-7z)^3+(x-2y+7z)^3-8x^3+6x(x+2y-7z)(x-2y+7z)$

Dando forma:

$M=(x+2y-7z)^3+(x-2y+7z)^3+$

$3\underbrace{(x+2y-7z+x-2y+7z)}_{2x}(x+2y-7z)(x-2y+7z)-8x^3$

Se observa suma de cubos:

$M=(x+2y-7z+x-2y+7z)^3-8x^3$

$M=(2x)^3-(2x)^3=0$

$\therefore\ M=0$

Clave C

35. Nos piden:

$P=(x^3+y^3)=(x+y)\ (x^2-xy+y^2)$

Datos:

$xy=\ 2\sqrt{3}\dfrac{1}{\sqrt{12}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=1$

$x+y=\sqrt{3}$

Elevamos al cuadrado:

$x^2+2xy+y^2=3\Rightarrow x^2+y^2=1$

Reemplazamos en lo pedido:

$P=\sqrt{3}\,(1-1)=0$

$\therefore\ P=0$

Clave C

Resolución de problemas

36. Como f(x) es un trinomio cuadrado perfecto, entonces:

$ax^2+bx+c=(mx+n)^2$

$=m^2x^2+2mnx+n^2$

$\Rightarrow a=m^2;\ c=n^2 \wedge b=2mn$

$\therefore\ \dfrac{8b^2}{ac}=\dfrac{8(2mn)^2}{m^2n^2}=\dfrac{8.4m^2n^2}{m^2.n^2}=32$

Clave D

37. $N=\dfrac{[(x+1)(x+2)+(x-3)(x+4)-(x+5)(x-6)-20]^2}{(x^2+5x+2)(x^2+5x+3)-5(x^2+5x)-6}$

Aplicando identidad de Stevin:

$N=\dfrac{[x^2+3x+2+x^2+x-12-x^2+x+30-20]^2}{(x^2+5x)^2+5(x^2+5x)+6-5(x^2+5x)-6}$

$N=\dfrac{(x^2+5x)^2}{(x^2+5x)^2}=1$

$\therefore\ N=1$

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 23) Unidad 1

Comunicación matemática

1.

2.

3.

4.

Razonamiento y demostración

5.

6. $\frac{x^{3n}}{x^n-1} - \frac{x^{2n}}{x^n+1} - \frac{1}{x^n-1} + \frac{1}{x^n+1}$

$= \frac{x^{3n}-1}{x^n-1} - \frac{x^{2n}-1}{x^n+1}$

$= (x^{2n}+x^n+1) - (x^n-1) = x^{2n}+2$

Clave D

7. $\frac{(2x)^9 - y^{18}}{(2x) - y^n}$

$\Rightarrow \frac{9}{1} = \frac{18}{n}$

$n = 2$

$\Rightarrow t_6 = (2x)^{9-6}(y^2)^{6-1}$

$\therefore t_6 = (2x)^3(y^2)^5 = 8x^3y^{10}$

Clave E

8. $\frac{x^{148m} - y^{296n}}{x^{2m} - y^{4n}} = \frac{(x^{2m})^{74} - (y^{4n})^{74}}{(x^{2m}) - (y^{4n})}$

$t_{60} = (x^{2m})^{74-60} \, . \, (y^{4n})^{60-1}$

$t_{60} = x^{28m} \, . \, y^{236n} = x^{140} \, . \, y^{1416}$

Luego:
$28m = 140 \Rightarrow m = 5$
$236n = 1416 \Rightarrow n = 6$

Nos piden: $m + n = 11$

Clave E

9. n.° términos $= \frac{32}{4} = 8$

$t_6 = (a^4)^{8-6}(b^9)^{6-1} = a^8b^{m+5}$

$a^8b^{45} = a^8b^{m+5}$

$\Rightarrow 45 = m + 5$

$\therefore m = 40$

Clave B

10. $\frac{x^m - z^m}{x^n - z^n}$; la división genera un C. N.

Luego:

N.° de términos $q(x) = \frac{m}{n} = mn^{-1}$

Clave B

11. Se cumple:

$\frac{n}{3} = \frac{m}{4} = 14 \Rightarrow n = 42 \wedge m = 56$

$\therefore m + n = 98$

Clave E

Resolución de problemas

12. n.° términos $= \frac{70}{7} = \frac{m+t}{t} = 10$

$\Rightarrow m = 9t$

Luego:
$t_7 = (x^7)^{10-7}(y^t)^{7-1} = x^{21}y^{6t}$

Del enunciado:
$6t = 12$
$\therefore t = 2$

Clave A

13. Sean: r el n.° términos y k el término central.

$t_k = (x^n)^{r-k}(y)^{k-1} = x^6y^3$

$\Rightarrow k - 1 = 3$

$k = 4$

Como: $k = \frac{r+1}{2} \wedge k = 4$

$\therefore r = 7$

Clave B

Nivel 2 (página 23) Unidad 1

Comunicación matemática

14.

15.

Razonamiento y demostración

16. I–B; II–C; III–E

17. $\frac{x^{a+1} - y^{20b}}{x^2 - y^b}$

Se cumple:

$\frac{a+1}{2} = \frac{20b}{b}$

$\Rightarrow a = 39$

Luego:

$\frac{x^{40} - y^{20b}}{x^2 - y^b} = \frac{(x^2)^{20} - (y^b)^{20}}{x^2 - y^b}$

Luego:
$t_3 = (x^2)^{20-3} \, . \, (y^b)^{3-1}$

$t_3 = x^{34} \, . \, y^{2b}$

Nos piden:
VN $t_3 = (0,5)^{34} \, . \, 2^{2\,.\,17}$

VN $t_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{34} . \, 2^{34} = 1$

Clave D

18. $\frac{(x+3)^{36} - x^{36}}{2x+3} = \frac{(x+3)^{36} - x^{36}}{(x+3)+x}$

Sabemos que:
$t_{29} = (x+3)^{36-29} \, . \, x^{29-1}$
$t_{29} = (x+3)^7 \, . \, x^{28}$

Nos piden:
VN $t_{29_{x=-1}} = (-1+3)^7(-1)^{28} = 2^7 = 128$

Clave A

19. $\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[7]{y}}{\sqrt[15]{x} + \sqrt[35]{y}} = \frac{(\sqrt[15]{x})^5 + (\sqrt[35]{y})^5}{(\sqrt[15]{x}) + (\sqrt[35]{y})}$

Nos piden:
$t_5 = (\sqrt[15]{x})^{5-5} . (\sqrt[35]{y})^{5-1}$

$t_5 = \sqrt[35]{y^4}$

Clave A

20. n.° términos $= \frac{n+1}{2} = \frac{40}{n-1}$ ...(1)

Resolviendo
$n^2 - 1 = 80$
$n^2 = 81 \Rightarrow n = 9$

Reemplazando n = 9 en (1):
$\therefore$ n.° términos $= \frac{9+1}{2} = 5$

Clave A

21. Debe cumplirse:

$\frac{m^2+7}{2} = \frac{9m-13}{2} \in \mathbb{Z}$ ...(1)

$\Rightarrow m^2 - 9m + 20 = 0$

m –4
m –5

$\Rightarrow m = 4 \vee m = 5$
$m = 4$ no cumple (1)

$\therefore m = 5$

Clave C

Resolución de problemas

22. $t_k = (x^2)^{n-k}(y^3)^{k-1} = x^{2n-2k}y^{3k-3}$

$\Rightarrow (2n - 2k) + (3k - 3) = 2n$

$2n + k - 3 = 2n$

$\therefore k = 3$

Clave B

23. Sea: $\frac{a^{3n} - b^{4m}}{a^3 - b^4}$

n.° términos $= \frac{3n}{3} = \frac{4m}{4} \Rightarrow m = n$

$t_{10} = (a^3)^{n-10}(b^4)^9 = a^{21}b^r$

$\Rightarrow 3(n-10) = 21 \wedge r = 36$

$n = 17$

$\Rightarrow m = 17$

$\therefore n + m + r + 3 = 73$

Clave E

Nivel 3 (página 24) Unidad 1

Comunicación matemática

24.

Clave E

25.

Razonamiento y demostración

26. $\dfrac{x^m - y^n}{x^5 - y^7}$

Si genera un CN, se cumple:

$\dfrac{m}{5} = \dfrac{n}{7} = p \Rightarrow \begin{matrix} m = 5p \\ n = 7p \end{matrix}$

Reemplazamos:

$\dfrac{x^{5p} - y^{7p}}{x^5 - y^7} = \dfrac{(x^5)^p - (y^7)^p}{(x^5) - (y^7)}$

Sabemos que:

$t_{17} = (x^5)^{p-17} . (y^7)^{17-1}$

$t_{17} = x^{5(p-17)} . y^{112} = x^{115} . y^{112}$

Igualamos:

$5(p - 17) = 115 \Rightarrow p - 17 = 23$

$p = 40$

Nos piden:

$n - m = 7p - 5p = 2p = 2(40) = 80$

Clave A

27. $\dfrac{x^2 - 2x + 2}{\sqrt[10]{x-1} - 1} = \dfrac{(x-1)^2 + 1}{\sqrt[10]{x-1} - 1}$

$= \dfrac{(\sqrt[10]{x-1})^{20} + 1}{(\sqrt[10]{x-1}) - 1}$

Sabemos que:

$t_{20} = (\sqrt[10]{x-1})^{20-20} = 1$

Clave D

28. $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{5} \Rightarrow a = 3k \wedge b = 5k$

Además:

$b - a = 6$

$5k - 3k = 6 \Rightarrow k = 3$

Luego:

$a = 9 \wedge b = 15$

n.° términos $= \dfrac{a}{3} = 3$

$\Rightarrow t_2 = -(x^3)^{3-2}(y^5)^{2-1} = -(x^3)^1(y^5)^1$

$\therefore t_2 = -x^3y^5$

Clave D

29. $\dfrac{x^{27^{5n}} + 1}{x^{3^{13n}} + 1}$

Sabemos que:

$\dfrac{27^{5n}}{3^{13n}} = \dfrac{(3^3)^{5n}}{3^{13n}} = 3^{2n} = 81 = 3^4$

Igualamos: $2n = 4 \Rightarrow n = 2$

Clave D

30. Se debe cumplir:

$\dfrac{13m + 1}{m + 1} = \dfrac{8m + 2}{m}$

$\Rightarrow 13m^2 + m = 8m^2 + 8m + 2m + 2$

$5m^2 - 9m - 2 = 0$

$5m \quad +1$

$m \quad -2$

$\Rightarrow m = 2 \vee m = -\dfrac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$

$\therefore m = 2$

Clave D

31. n.° términos $= \dfrac{60}{5} = 12$

$t_k = (a^5)^{12-k}(b^2)^{k-1}$

$t_k = a^{60-5k} . b^{2k-2}$

$GA = (60 - 5k) + (2k - 2)$

$31 = 58 - 3k$

$3k = 58 - 31 = 27$

$\therefore k = 9$

Clave B

Resolución de problemas

32. $\dfrac{x^{6n} - y^{10p}}{x^{n-4} + y^p}$

Si genera un CN, se cumple:

$\dfrac{6n}{n-4} = \dfrac{10p}{p} \Rightarrow n = 10$

Reemplazamos:

$\dfrac{x^{60} - y^{10p}}{x^6 + y^p} = \dfrac{(x^6)^{10} - (y^p)^{10}}{(x^6) + (y^p)}$

Sea:

$t_k = x^{18}y^{24}$ ...(I)

Luego:

$t_k = (x^6)^{10-k} . (y^p)^{k-1}$

$t_k = x^{60-6k} . y^{pk-p}$ ...(II)

De (I) $\wedge$ (II):

$18 = 60 - 6k \Rightarrow k = 7$

$24 = pk - p$

$24 = 7p - p \Rightarrow p = 4$

Nos piden:

$t_8 = -(x^6)^{10-8} . (y^4)^{8-1}$

$t_8 = -x^{12} . y^{28}$

Clave D

33. Dos términos consecutivos:

$x^{46}y^{72}; x^{44}y^{78}$

Analizamos los exponentes, vemos que **x** varía en 2 e **y** varía en 6.

$\Rightarrow \dfrac{x^{2n} - y^{6n}}{x^2 - y^6}$

$t_k = (x^2)^{n-k}(y^6)^{k-1} = x^{46} . y^{72}$

Luego:

- $6(k - 1) = 72 \Rightarrow k = 13$
- $2(n - k) = 46$

  $n - 13 = 23$

$\therefore n = 36$

Clave A

FACTORIZACIÓN

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 28) Unidad 1

Comunicación matemática

1.

2. Divisores Trinómicos.

Razonamiento y demostración

3. $x^3 + 5x^2 - 4x - 2$

Aplicamos criterio a evaluar:
Como el polinomio es mónico, se trabaja con los divisores del término independiente.

$\pm\{1; 2\}$, utilizamos el esquema Ruffini:

	1	5	–4	–2
1		1	6	2
	1	6	2	0

$x^3 + 5x^2 - 4x - 2 = (x - 1)(x^2 + 6x + 2)$

$\therefore$ Un factor primo es: $x^2 + 6x + 2$

Clave D

4. $J(m; n) = m^2(4m^2 - 5) + 1$
$= 4m^4 - 5m^2 + 1$

$4m^2 \quad -1$
$m^2 \quad -1$

$\Rightarrow J(m; n) = (4m^2 - 1)(m^2 - 1)$
$J(m; n) = \underbrace{(2m - 1)}(2m + 1)(m - 1)(m + 1)$

factor primo

$\therefore$ Un factor primo es: $2m - 1$

Clave C

5. $H(x; y) = 54x^8 + 21x^4y^2 - 20y^4$

$9x^4 \quad -4y^2$
$6x^4 \quad 5y^2$

$= (9x^4 - 4y^2)(6x^4 + 5y^2)$
$= (3x^2 + 2y)(3x^2 - 2y)(6x^4 + 5y^2)$

Un factor primo es: $3x^2 + 2y$

Clave E

6. $F(x; y) = (xy + 1)^2 - x^2 - 2xy - y^2 + 4xy$
$= (xy + 1)^2 - x^2 + 2xy - y^2$
$= (xy + 1)^2 - (x - y)^2$
$= (xy + 1 + x - y)(xy + 1 - x + y)$

Σ factores primos $= 2xy + 2$

Clave E

7. $P(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 4$

Agrupamos:

$P(x) = x^4 + 5x^2 + 4 + 3x^3 + 3x$

$x^2 \quad 4$
$x^2 \quad 1$

$\Rightarrow P(x) = (x^2 + 4)(x^2 + 1) + 3x(x^2 + 1)$
$\therefore P(x) = \underbrace{(x^2 + 1)}(x^2 + 3x + 4)$

factor primo

Clave D

8. $P(a; b; c; d) = (a + b)(a + c) - (b + d)(c + d)$
$= a^2 - d^2 + (b + c)(a - d)$
$= (a + d)(a - d) + (b + c)(a - d)$
$= (a - d)(a + d + b + c)$

n.° factores primos binómicos: 1

Clave C

Resolución de problemas

9. $2x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$

Posibles raíces $= \frac{1}{2}; 1; 2$

	2	–7	–1	2
$x = \frac{1}{2}$		1	–3	–2
:2	2	–6	–4	0
	↓	↓	↓	↓
	1	–3	–2	

$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 - 3x - 2)$

$\therefore$ Un término independiente es: -2

Clave A

10. $F(x) = (x + y)^2 + (x - y)^2 + 4xy - 5(x + y) + 2$
$= 2(x + y)^2 + (x - y)^2 - (x + y)^2 + 4xy - 5(x + y) + 2$
$= 2(x + y)^2 - 5(x + y) + 2$

$2(x + y) \quad -1$
$(x + y) \quad -2$

$= [2x + 2y - 1][x + y - 2]$

$\therefore\ \Sigma$ de términos independientes $= -3$

Clave A

Nivel 2 (página 28) Unidad 1

Comunicación matemática

11.

	x	b
a	ax	ab
x	x^2	bx

Área = $x^2 + (a + b)x + ab$

Esta gráfica también es equivalente a:

a + x; b + x; Área = $(a + x)(b + x)$

$\Rightarrow$ Área: $x^2 + (a + b)x + ab = (a + x)(b + x)$

12. $21x^4 + 13x^3 + 85x^2 + 24x + 22$

$3x^2 \quad x \quad 11$
$7x^2 \quad 2x \quad 2$

$B(x) = \underbrace{(3x^2 + x + 11)}\underbrace{(7x^2 + 2x + 2)}$

Σcoef. 15 11

Clave A

Razonamiento y demostración

13. $P(x) = x^3 - 5x^2 + x + 10$

PCR $= \pm\{1; 2; 5; 10\}$

	1	–5	1	10
x = 2	↓	2	–6	–10
	1	–3	–5	0

Luego:
$P(x) = (x - 2)(x^2 - 3x - 5)$
Un factor primo es: $x - 2$

Clave B

14. Piden: $d - 2c - b^{2a}$

Dato:
$a + b + c + d = 33$
$P(x) = 6x^2 + dx + 7$

$3x \quad a \to 1$
$2 \to bx \quad c \to 7$

Del aspa simple:
$b = 2$
$a = 1$
$c = 7$
$\Rightarrow d = 23$

Luego:
$d - 2c - b^{2a} = 23 - 2(7) - (2)^{2(1)}$
$= 23 - 14 - 4$
$\therefore d - 2c - b^{2a} = 5$

Clave A

15. $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3$

Agrupamos:
$3x^3 - 3 - 13x^2 + 13x$
$= 3(x^3 - 1) - 13x(x - 1)$
$= 3(x - 1)(x^2 + x + 1) - 13x(x - 1)$
$= (x - 1)[3x^2 + 3x + 3 - 13x]$
$= (x - 1)\ [3x^2 - 10x + 3]$

$3x \quad -1$
$x \quad -3$

$= (x - 1)(3x - 1)(x - 3)$

El producto de los términos de un factor es:
$(x)(-1) = -x$

Clave C

16. $P(x) = x(c^4x - 6 - x) - 9$
$P(x) = c^4x^2 - x^2 - 6x - 9$
$P(x) = (c^2x)^2 - (x + 3)^2$
$P(x) = (c^2x + x + 3)(c^2x - x - 3)$
Para: $x = -3$
$c^2(-3) + (-3) + 3 = -3c^2$
$c^2(-3) - (-3) - 3 = -3c^2$

Clave D

17. $P(x; y) = x^2 - y^2 + a^2 - b^2 + 2(ax - by)$
$= x^2 + a^2 + 2ax - (b^2 + y^2 + 2by)$
$= (x + a)^2 - (b + y)^2$
$= (x + a + b + y)(x + a - b - y)$
$\therefore$ Número de factores lienales: 2

Clave C

18. $R = x^{n+2} - ax^{n+1} + bx^{n+1} - abx^n$
$= x^n(x^2 - ax + bx - ab)$
Agrupamos:
$R(x) = x^n[x(x - a) + b(x - a)]$
$R(x) = x^n(x - a)(x + b)$
Un factor es: $x + b$

Clave A

Resolución de problemas

19. $F(x) = x^2(2x + 7)^2 - 12(2x^2 + 7x) - 60 + 15$
$= x^2(2x + 7)^2 - 12x(2x + 7) - 45$
$x(2x + 7) \quad -15$
$x(2x + 7) \quad +3$
$F(x) = (2x^2 + 7x - 15)(2x^2 + 7x + 3)$
$1x \quad +5 \qquad 2x \quad +1$
$2x \quad -3 \qquad x \quad +3$
$= (x + 5)(2x - 3)(2x + 1)(x + 3)$
$\sum$ términos independientes = 6

Clave D

20. $F(x) = (x^2 + 2)^2 - (2x + 1)^2$
$= (x^2 + 2 - 2x - 1)(x^2 + 2 + 2x + 1)$
$= (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 3)$
$= (x - 1)^2(x^2 + 2x + 3)$
$\Rightarrow$ Se repite: $(x-1)$

Clave B

Nivel 3 (página 29) Unidad 1

Comunicación matemática

21. $2\sqrt{5Mx^{10}}\sqrt{Ny^{10}} = 2(55)x^5y^5$
$\sqrt{5MN}\,x^5y^5 = 55\,x^5y^5$
$5MN = 55(55)$
$MN = 5(121)$
Probamos:
$\left.\begin{matrix} M = 121 \\ N = 5 \end{matrix}\right\} \quad \dfrac{M - N}{2} = 58 \Rightarrow$ clave A
$\left.\begin{matrix} M = 55 \\ N = 11 \end{matrix}\right\} \quad \dfrac{M - N}{2} = 22$

Clave A

22. $a^6 - 4a^3b + 3b^2 - 4a^3c^3 + 6bc^3 + 3c^6$
$a^3 \quad -3b \quad -3c^3$
$a^3 \quad -b \quad -c^3$

$-3a^3b$	$3bc^3$	$-3a^3c^3$
$-a^3b$	$3bc^3$	$-a^3c^3$
$-4a^3b$	$6bc^3$	$-4a^3c^3$

$\Rightarrow P(a,b) = (a^3 - 3b - 3c^3)(a^3 - b - c^3)$
I. V
II. V
III. $P(1,1) = (2 + 3c^3)c^3$ (F)

Clave C

Razonamiento y demostración

23. $M(a; b) = a^2 + 5ab + 6b^2 + 5b + a - 6$
$a \quad 3b \quad -2$
$a \quad 2b \quad 3$
$= (a + 3b - 2)(a + 2b + 3)$
Un factor primo es: $a + 3b - 2$

Clave C

24. $F(x; y) = x^3 - 3xy(x - y) + 26y^3$
$F(x; y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 26y^3$
Por divisores binómicos:

	1	$-3y$	$3y^2$	$26y^3$
$-2y$		-2	$10y^2$	$-26y^3$
	1	$-5y$	$13y^2$	0

Luego:
$F(x; y) = (x + 2y)(x^2 - 5xy + 13y^2)$
Un factor primo es: $x + 2y$

Clave A

25. $P(x) = x^3 + (a - 1)x^2 - (a + 2)x - 2a$
Factorizamos, por divisores binómicos:
PCR $= \pm\{1; 2; a; 2a\}$

	1	$a - 1$	$-(a + 2)$	$-2a$
$-a$		$-a$	a	$2a$
	1	-1	-2	0

$\Rightarrow P(x) = (x + a)(x^2 - x - 2)$
$x \quad -2$
$x \quad +1$
$P(x) = (x + a)(x - 2)(x + 1)$
$\therefore$ Un factor primo es: $x+a$

Clave A

26. $M(x; y) = 12(x + y)^2 + 7(x + y) - 12$
$4(x + y) \quad -3$
$3(x + y) \quad +4$
$\Rightarrow M(x; y) = [4(x + y) - 3][3(x + y) + 4]$
$\therefore M(x; y) = (4x + 4y - 3)(3x + 3y + 4)$

Clave B

27. $P(x) = x^2(x^2 + 2x + 1) - 18x(x + 1) + 72$
$= x^2(x + 1)^2 - 18x(x + 1) + 72$
$x(x + 1) \quad -12$
$x(x + 1) \quad -6$
$= (x(x + 1) - 12)(x(x + 1) - 6)$
$= (x^2 + x - 12)(x^2 + x - 6)$
$= (x + 4)(x - 3)(x - 2)(x + 3)$

Clave D

28. $F(x) = (x^2 + 6)^2 + 3x(x^2 + 6) - 10x^2$
$(x^2 + 6) \quad +5x$
$(x^2 + 6) \quad -2x$
$F(x) = (x^2 + 6 + 5x)(x^2 + 6 - 2x)$
$= (x^2 + 5x + 6)(x^2 - 2x + 6)$
$x \quad +3$
$x \quad +2$
$= (x + 3)(x + 2)(x^2 - 2x + 6)$

Clave A

Resolución de problemas

29. Agrupamos convenientemente:
$A = mxz + mqx + myz + mqy + nxz + nqx + nyz + myq$
$A = m(xz + qx + yz + qy) + n(xz + qx + yz + yq)$
$A = m(x(z + q)) + y(z + q)) + n(x(z + q) + y(z + q)$
$A = m(z + q)(x + y) + n(z + q)(x + y)$
$\therefore A = (z + q)(x + y)(m + n)$

Clave B

30. $R(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 - 3x + 5$
$x^2 \quad 2x \quad 5$
$x^2 \quad -x \quad 1$
$-2x^2$
Del aspa mayor se tiene:
$6x^2 - 2x^2 = 4x^2$
$\Rightarrow (x^2 + \underline{2x} + 5)(x^2 - \underline{x} + 1)$
Nos piden:
$2x - x = x$

Clave C

31. $F(x) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$
Multiplicamos convenientemente:
$F(x) = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) + 1$
$= \underbrace{(x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x) + 1}$
$= (x^2 + 3x + 1)^2$
Se obtiene un factor primo, que se repite dos veces.

Clave E

MARATÓN MATEMÁTICA
(página 30) Unidad 1

1. Factorizando:

Por Ruffini:
$\dfrac{(n+7)(n+2)(n-1)}{(n+2)} = (n+7)(n-1)$ (V)

Evaluamos:
$P(-1) = 4(-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1)$ (F)
$= -4 - 2 - 1$
$= -7$

Dividimos por Horner:

1	2	–1	–7	6
–1		–2	4	
2			3	–6
	2	–3	0	0

$\Rightarrow$residuo 0 (V)

Clave D

2. De la premisa:

$P(x) = k(x+3)(x+1)(x-2) + 5$
$P(0) = k(3)(1)(-2) + 5 = 6$
$\Rightarrow k = -1/6$
$P(x) = -1/6(x+3)(x+1)(x-2) + 5$
$P(5) = -1/6(8)(6)(3) + 5$
$\therefore P(5) = -19$

Clave D

3. Operamos:

$$B = \left[\dfrac{\dfrac{1}{m^3} + \dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{1}{m^3} \cdot \dfrac{1}{n^3}}\right]^{-1} = \left[\dfrac{m^3+n^3}{m^3n^3}(m^3n^3)\right]^{-1}$$

$$B = \dfrac{1}{m^3+n^3} = \dfrac{1}{(m+n)(m^2-mn+n^2)}$$

Del dato: $m^2 + n^2 + \underbrace{2mn}_{1/2} = 9 \Rightarrow m^2 + n^2 = 8$

Reemplazamos:
$$B = \dfrac{1}{(3)\left(8 - \dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{2}{45}$$

Clave B

4. $3^{(15+x)/x} = 3^{5/2}$ (bases iguales)

Igualamos los exponentes: $\dfrac{15+x}{x} = \dfrac{5}{2}$
$\therefore x = 10$

Clave B

5. Por Ruffini:

	1	0	–3	3	0	–1
3		3	9	18	63	189
	1	3	6	21	63	188

coeficientes del cociente

Σcoeficientes $= 1 + 3 + 6 + 21 + 63 = 94$

Clave D

6.

3	6	8	0	1	a	b	c
–1		–2	–4	–2			
–2			–2	–4	–2		
–1				2	4	2	1
					1	2	1
	2	2	–2	–1	○	○	○
					↓ 2	↓ 4	↓ –3

$\Rightarrow a - 2 + 4 + 1 = 2 \Rightarrow a = -1$
$b + 2 + 2 = 4 \quad \Rightarrow b = 0$
$c + 1 = -3 \quad \Rightarrow c = -4$
$\therefore a + b + c = -5$

Clave B

7. $P(x) = Q(x+1)$ Evaluamos $x = -2$

$\Rightarrow P(-2) = Q(-1)$
$3(-2)^3 - 2(-2)^2 + 5(-2) + 8 = -a - b - c - d$
$-24 - 8 - 10 + 8 = -(a + b + c + d)$
$-34 = -(a + b + c + d)$
$\therefore a + b + c + d = 34$

Clave A

8. $GR(x) = m + 2$
$GA(P) = m + 9$ } +
$m + 11$
$\therefore GR(x) + GA(P) = m + 11$

Clave D

9. $x + \dfrac{1}{x} = 4$

Al cuadrado
$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 14$

Al cubo
$x^3 + \dfrac{1}{x^3} + 3\underbrace{\left(x + \dfrac{1}{x}\right)}_{4} = 4^3$

$x^3 + \dfrac{1}{x^3} = 52$

Entonces:
$\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \dfrac{1}{x^3}\right) = 14 \times 52$

$x^5 + \underbrace{\dfrac{1}{x} + x}_{4} + \dfrac{1}{x^5} = 728$

$\therefore x^5 + \dfrac{1}{x^5} = 724$

Clave E

10. Hacemos: $x^2 - 1 = 0$
$\Rightarrow x^2 = 1$

Damos forma al dividendo:
$7(x^2)^{56} - 6(x^2)^{20} + 36(x^2)^8 + (x^2)^3 + 4$

$\therefore$ Resto: $7(1)^{56} - 6(1)^{20} + 36(1)^8 + 1^3 + 4 = 42$

Clave E

11. Reduciendo tenemos:

$$N = \dfrac{\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{-1}{2}} + \left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}}}{3^2}$$

$$N = \dfrac{\sqrt{4} + (\sqrt{7})^2}{3^2}$$

$$N = \dfrac{2+7}{3^2} = 1$$

Clave B

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 35) Unidad 2

Comunicación matemática

1.

2. A) Mayor
B) Igual
C) Expresión fraccionaria
D) Constante - mismo - variables

Razonamiento y demostración

3. Sean las expresiones:
A(x); B(x)

Por condición:
$A.B=(x+1)^2(x+2)(x+5)$

Por propiedad:
$$\left[MCM(A;B)\right]\cdot\underbrace{\left[MCD(A;B)\right]}_{x+2}=(x+1)^2(x+2)(x+5)$$

Luego:
$MCM(A;B)=(x+1)^2(x+5)$
$=(x^2+2x+1)(x+5)$

Efectuamos:
$MCM(A;B)=x^3+2x^2+x+5x^2+10x+5$
$\therefore MCM(A;B)=x^3+7x^2+11x+5$

Clave B

4. $R=\dfrac{x^5-px^4-p^4x+p^5}{x^4-px^3-p^2x^2+p^3x}$

Agrupamos:
$$R=\frac{x(x^4-p^4)-p(x^4-p^4)}{x^2(x^2-p^2)-px(x^2-p^2)}$$
$$R=\frac{x(x^4-p^4)-p(x^4-p^4)}{x^2(x^2-p^2)-px(x^2-p^2)}$$
$$R=\frac{(x^4-p^4)(x-p)}{x(x^2-p^2)(x-p)}$$
$$R=\frac{(x^2-p^2)(x^2+p^2)}{x(x^2-p^2)}=\frac{x^2+p^2}{x}$$

Clave D

5. $F=\dfrac{x^3+2x^2+2x+1}{x^3-x^2-x-2}$
$$F=\frac{x^3+1+2x(x+1)}{x^3-1-x^2-x-1}$$
$$F=\frac{(x+1)(x^2-x+1)+2x(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)-(x^2+x+1)}$$
$$F=\frac{(x+1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x-2)}=\frac{x+1}{x-2}$$

Clave D

6. $K=\left[\dfrac{a(a+c)+b(c-b)}{c(a+c)+b(a-b)}\right]:\dfrac{1}{b+c}$
$$K=\left[\frac{a^2+ac+bc-b^2}{ac+c^2+ab-b^2}\right](b+c)$$
$$K=\left[\frac{(a+b)(a-b)+(a+b)c}{a(c+b)+(c+b)(c-b)}\right](b+c)$$
$$K=\frac{(a+b)(a-b+c)}{(c+b)(a+c-b)}\cdot(b+c)=a+b$$

Clave C

7. $R=x-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-x}}}$
$$R=x-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\cfrac{-x}{1-x}}}$$
$$R=x-\cfrac{1}{1+\cfrac{1-x}{x}}$$
$$R=x-\cfrac{1}{\cfrac{x+1-x}{x}}=x-\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}}$$
$\therefore\ R=x-x=0$

Clave D

8. $M=\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{x-1}}}$
$$M=\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{\cfrac{x-1+2}{x-1}}}$$
$$M=\cfrac{2}{1+\cfrac{x-1}{x+1}}$$
$$M=\cfrac{2}{\cfrac{x+1+x-1}{x+1}}=\frac{2(x+1)}{2x}$$
$$M=\frac{x+1}{x}$$

Clave D

Resolución de problemas

9. $P(x)=MCD(P;Q).h(x)$
$Q(x)=MCD(P;Q).g(x)$
$\Rightarrow P(x)-Q(x)=MCD(P;Q)(h(x)-g(x))$

$\Rightarrow \dfrac{P(x)-Q(x)}{MCD(P;Q)}$ tiene $R(x)=0$

$$\frac{x^2(a-c)+x(a+b-c-d)+(b-d)}{MCD(P;Q)}$$
↳ cuadrado perfecto

Luego, el numerador también tiene que ser un cuadrado perfecto.

Analizamos el discriminante:
$\Rightarrow (a+b-(c+d))^2-4(a-c)(b-d)=0$
$[(a-c)+(b-d)]2-4(a-c)(b-d)=e$
$\underbrace{(a-c)2-2(a-c)(b-d)+(b-d)^2}=0$
$[(a-c)-(b-d)]^2=0$
$\Rightarrow (a-c)-(b-d)=0$
$\therefore a+d=c+b$

Clave C

10. Del enunciado se puede deducir:
$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=k^2$

Como:
$bde=\dfrac{R^2}{k^2}\longleftarrow$ (dato)

$\left(\dfrac{a}{k^2}\right)\left(\dfrac{c}{k^2}\right)fk^2=\dfrac{R^2}{k^2}$
$\Rightarrow acf=R^2$
$\therefore \sqrt{acf}=R$

Clave E

Nivel 2 (página 36) Unidad 2

Comunicación matemática

11. VFVV

12.

Clave C

Razonamiento y demostración

13.
$\dfrac{2x^3-x^2+3x+m}{x^2-x+2};\ R=0$

Por Horner:

1	2	–1	3	m
1		2	–4	
–2			1	–2
	2	1	0	0

$m-2=0\Rightarrow m=2$

$\dfrac{x^3+x^2+n}{x^2-x+2}$

Por Horner:

1	1	1	0	n
1		1	–2	
–2			2	–4
	1	2	0	0

$n - 4 = 0 \Rightarrow n = 4$

Luego: $mn = 2(4) = 8$

Clave D

14. Sabemos que:

$x = \frac{a+b}{a-b}; y = \frac{b+c}{b-c}; z = \frac{c+a}{c-a}$

$\frac{ab}{(a-b)^2} + \frac{bc}{(b-c)^2} + \frac{ac}{(a-c)^2} = 3 \quad ...(I)$

Elevamos al cuadrado:

$x^2 = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$

Restamos uno a ambos miembros:

$x^2 - 1 = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} - 1$

$x^2 - 1 = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a-b)^2} = \frac{4ab}{(a-b)^2}$

Luego:

$\frac{x^2-1}{4} = \frac{ab}{(a-b)^2}$

Análogamente para los demás se tiene:

$\frac{y^2-1}{4} = \frac{bc}{(b-c)^2} \quad \wedge \quad \frac{z^2-1}{4} = \frac{ac}{(a-c)^2}$

Reemplazando en (I):

$\frac{x^2-1}{4} + \frac{y^2-1}{4} + \frac{z^2-1}{4} = 3$

$x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 12$

$\therefore \ M = x^2 + y^2 + z^2 = 15$

Clave A

15. $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{n^2+n}$

$S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$

$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ...$

$+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$S = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

Clave E

16. Si F(x; y) es independiente de x e y, entonces:

F(x; y) = k: cte

$\frac{mx^2 + 18xy + 24y^2}{5x^2 + 3xy + ny^2} = k$

Si $x = 1 \wedge y = 0 \Rightarrow \frac{m}{5} = k \quad ...(I)$

Si $x = 0 \wedge y = 1 \Rightarrow \frac{24}{n} = k \quad ...(II)$

Si $x = y = 1 \Rightarrow \frac{m+42}{8+n} = k \quad ...(III)$

De (I) y (II): $n . m = 120$

De (II) y (III): $n = 4 \Rightarrow m = 30$

$\therefore \ n + m = 34$

Clave C

17. Sea:

$A = \left[a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{\vdots}}}}\right]_{\infty} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{A}}$

$\Rightarrow A = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{A}} \quad ...(1)$

Piden:

$\cfrac{A}{b + \cfrac{1}{A}} = \frac{A^2}{bA+1} \quad ...(2)$

De (1):

$A - a = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{A}} = \frac{A}{bA+1}$

$A^2b + A - abA - a = A$

$bA^2 = a(bA + 1)$

$\frac{A^2}{bA+1} = + \frac{a}{b}$

De (2):

$\therefore \ \cfrac{A}{b + \cfrac{1}{A}} = \frac{a}{b}$

Clave B

18. $F = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\vdots}}}}$

$F = 3 + \cfrac{1}{3 + 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\vdots}}}}$

$F = 3 + \frac{1}{3+F}$

$F^2 + 3F = 9 + 3F + 1$

$F^2 = 10$

Nos piden: $F^2 + 1 = 10 + 1 = 11$

Clave A

19. $B = \frac{1}{a-5} - \frac{2}{a^2 - 8a + 15} - \frac{1}{a^2 - 5a + 6}$

$B = \frac{1}{a-5} - \frac{2}{(a-5)(a-3)} - \frac{1}{(a-3)(a-2)}$

$B = \frac{(a-3)(a-2) - 2(a-2) - (a-5)}{(a-5)(a-3)(a-2)}$

Desarrollamos el numerador:

$B = \frac{a^2 - 8a + 15}{(a-5)(a-3)(a-2)}$

$= \frac{(a-5)(a-3)}{(a-5)(a-3)(a-2)}$

$\therefore \ B = \frac{1}{a-2}$

Clave C

20. Desarrollamos M:

$M = \frac{abx^2 + aby^2 + xya^2 + xyb^2}{abx^2 - aby^2 + xya^2 - xyn^2}$

Agrupamos convenientemente:

$M = \frac{(abx^2 + a^2xy) + (aby^2 + b^2xy)}{(abx^2 + a^2xy) - (aby^2 + 5^2xy)}$

Factorizamos:

$M = \frac{ax(bx + ay) + by(ay + bx)}{ax(bx + ay) - by(ay + bx)}$

$M = \frac{(bx + ay)(ax + by)}{(bx + ay)(ax - by)}$

$M = \frac{ax + by}{ax - by}$

Piden:

Suma de términos = 2ax

Clave B

Resolución de problemas

21. Factorizamos H(x) por evaluación binómica, se anula para x = 5, luego por Ruffini.

	1	–5	0	0	0	0	9	–46	5
5		5	0	0	0	0	0	45	–5
	1	0	0	0	0	0	9	–1	0

Donde:

$H(x) = (x^7 + 2x - 1)(x - 5)$

- Factorizamos W así (x) por agrupación:

$W(x) = (x^{13} + 12x^7 + 27x) - (x^6 + 3)$

$= x(x^{12} + 12x^6 + 27) - (x^6 - 3)$

$x^6 \quad 9$

$x^6 \quad 3$

$= x(x^6 + 9)(x^6 + 3) - (x^6 + 3)$

$W(x) = (x^7 + 9x - 1)(x + 3)$

$MCD(H, W) = x^7 + 9x - 1 = ax^7 + bx + c$

Nos piden:

$R = 9^{(1-(-1))^{-1}} = 3$

Clave C

22. La fracción es equivalente a la siguiente forma:

$$F=\frac{(x^3+Ax+B)(x+C)}{(x^3+Ax+B)(x+D)}=\frac{x^4+Cx^3+Ax^2+(AC+B)x+BC}{x^4+Dx^3+Ax^2+(AD+B)x+BD}$$

Comparamos las fracciones:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}C=t+2\\D=t\end{array}\right\}C-D=2\\ \dfrac{BC}{BD}=\dfrac{21}{7}\Rightarrow\dfrac{C}{D}=\dfrac{3}{1}\end{array}\right\}\begin{array}{l}C=3\\D=1\end{array}$$

Luego:

$AC+B=28\Rightarrow 3A+B=28$

$AD+B=10\Rightarrow A+B=10$

$A=9$; $B=1$

Nos piden: $A^B=9^1=9$

La fracción simplificada es: $E=\frac{X+C}{X+D}=\frac{X+3}{X+1}$

Nos piden: $(x+3)+(x+1)=2x+4$

$=2(x+2)$

Clave E

Nivel 3 (página 37) Unidad 2

Comunicación matemática

23.

24. $P=\frac{3}{5}$ y $Q=\frac{5}{7}\Rightarrow\frac{3}{P}+\frac{7}{Q}>14$

Clave D

Razonamiento y demostración

25. Como: P(x) es divisible por $(x-2)(x-3)$

$\Rightarrow R(x)$ de $\frac{P(x)}{x^2-5x+6}$ es cero.

Por Horner:

1	1	0	–9	m	n
5		5	–6		
–6			25	–30	
				50	–60
	1	5	10	0	0

$\Rightarrow m=-20\ \wedge\ n=60$

Luego:

$P(x)=(x^2-5x+6)(x^2+5x+10)$

$P(x)=(x-2)(x-3)(x^2+5x+10)$

Análogamente para el polinomio F(x):

1	1	2	–7	p	q
5		5	–6		
–6			35	–42	
				110	–132
	1	7	22	0	0

$\Rightarrow F(x)=(x-2)(x-3)(x^2+7x+22)$

$\therefore MCM(P;F)=(x-2)(x-3)\ (x^2+5x+10)(x^2+7x+22)$

Clave E

26. Del dato:

$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}=\frac{1}{a-c}$$

$$\frac{b-c+a-b}{ab-ac-b^2+bc}=\frac{1}{a-c}$$

$a^2-2ac+c^2=ab-ac-b^2+bc$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$

Entonces, por propiedad de productos notables:

$a=b=c$

Reemplazamos en lo que nos piden:

$$M=\frac{a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{abc(a+b+c)}$$

$$M=\frac{a^4+a^4+a^4+a^4+a^4+a^4}{a^3(3a)}$$

$\therefore M=2$

Clave C

27. $$R=\frac{y^2}{xyz(x+y)}+\frac{z^2}{xyz(y+z)}+\frac{x^2}{xyz(z+x)}$$

$$R=\frac{1}{xyz}\left[\frac{y^2}{x+y}+\frac{z^2}{y+z}+\frac{x^2}{z+x}\right]$$

$$\Rightarrow 2xyzR=\frac{2y^2}{x+y}+\frac{2z^2}{y+z}+\frac{2x^2}{z+x}\qquad ...(1)$$

Dato:

$$xyz=\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x}\qquad ...(2)$$

Restamos (2) de (1):

$$xyz(2R-1)=\frac{y^2-x^2}{x+y}+\frac{z^2-y^2}{y+z}+\frac{x^2-z^2}{z+x}$$

$xyz(2R-1)=(y-x)+(z-y)+(x-z)$

$xyz(2R-1)=0$

$\therefore R=\frac{1}{2}$

Clave A

28. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\Rightarrow a=bk\ \wedge\ c=dk$ ...(1)

Nos piden:

$$E=\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}-\frac{ab}{a+b}-\frac{cd}{c+d}\qquad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$E=\frac{(bk+dk)(b+d)}{bk+b+dk+d}-\frac{bk\,.\,b}{bk+b}-\frac{dk\,.\,b}{dk+d}$$

$$E=\frac{(b+d)^2k}{(b+d)(k+1)}-\frac{b^2k}{b(k+1)}-\frac{d^2k}{d(k+1)}$$

$$E=\frac{(b+d)k}{k+1}-\frac{bk}{k+1}-\frac{dk}{k+1}$$

$\therefore E=0$

Clave A

29. $$\frac{\dfrac{(a-x)^{2n-1}+(a-x)^{2n-2}x+...+x^{2n-1}}{(a-x)^{2n}}}{\dfrac{(a-x)^{2n-1}-(a-x)^{2n-2}x+...-x^{2n-1}}{(a-x)^{2n}}}$$

$$=\frac{(a-x)^{2n-1}+(a-x)^{2n-2}x+...+x^{2n-1}}{(a-x)^{2n-1}-(a-x)^{2n-2}x+...-x^{2n-1}}$$

$$=\frac{\dfrac{(a-x)^{2n}-x^{2n}}{(a-x)-x}}{\dfrac{(a-x)^{2n}-x^{2n}}{(a-x)+x}}=\frac{\dfrac{(a-x)^{2n}-x^{2n}}{a-2x}}{\dfrac{(a-x)^{2n}-x^{2n}}{a}}$$

$$=\frac{a}{a-2x}$$

Clave C

30. $$E=\frac{a^2-2ax+x^2}{2(a^2-x^2)}-\frac{2ax(a+x)}{(a-x)(a^2+2ax+x^2)}+\frac{a^2-x^2}{2(x-a)^2}$$

$$E=\frac{(a-x)^2}{2(a+x)(a-x)}-\frac{2ax(a+x)}{(a-x)(a+x)^2}+\frac{(a+x)(a-x)}{2(a-x)^2}$$

$$E=\frac{a-x}{2(a+x)}-\frac{2ax}{(a-x)(a+x)}+\frac{a+x}{2(a-x)}$$

$$E=\frac{(a-x)^2-4ax+(a+x)^2}{2(a+x)(a-x)}$$

Desarrollamos el numerador y simplificamos:

$$E=\frac{a-x}{a+x}$$

$\therefore$ Piden el denominador: $a+x$

Clave C

31. Dato:

$xy+yz+zx=1$

$\left.\begin{array}{l} xy=1-yz-zx \\ yz=1-xy-zx \\ zx=1-xy-yz \end{array}\right\}$ ...(*)

$xy+yz+zx=3xyz$ ...(α)

Nos piden:

$$A=\frac{y(1+x^2)}{(1-xy)(1-xz)}+\frac{z(1+y^2)}{(1-yz)(1-xy)}+\frac{x(1+z^2)}{(1-zx)(1-yz)}$$

$$A=\frac{y(1+x^2)}{1-xy-xz+x^2yz}+\frac{z(1+y^2)}{1-yz-xy+xy^2z}+\frac{x(1+z^2)}{1-zx-yz+xyz^2}$$

Reemplazamos (*):

$$A=\frac{y(1+x^2)}{yz+x^2yz}+\frac{z(1+y^2)}{zx+xy^2z}+\frac{x(1+z^2)}{xy+xyz^2}$$

$$A=\frac{y(1+x^2)}{yz(1+x^2)}+\frac{z(1+y^2)}{zx(1+y^2)}+\frac{x(1+z^2)}{xy(1+z^2)}$$

$$A=\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{xy+yz+xz}{xyz}$$

Reemplazamos (α):

$$A=\frac{3xyz}{xyz}=3$$

Clave C

32. Dato:

$a+b+c=0$

$a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ac)$

Elevamos al cuadrado:

$a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)=4[(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2]$

$a^4+b^4+c^4=2[(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2]$

Nos piden:

$$S=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^4+b^4+c^4}$$

$$S=\frac{a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)}{a^4+b^4+c^4}$$

$$\therefore S=\frac{2(a^4+b^4+c^4)}{a^4+b^4+c^4}=2$$

Clave B

33. $$\frac{3x+4}{x^2+3x+2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

$$\frac{3x+4}{x^2+3x+2}=\frac{Ax+2A+Bx+B}{x^2+3x+2}$$

$3x+4=(A+B)x+2A+B$

$\Rightarrow A+B=3$ ...(1)

$2A+B=4$ ...(2)

De (1) y (2):

$\Rightarrow A=1 \ \wedge \ B=2$

$\therefore 3B-2A=6-2=4$

Clave D

Resolución de problemas

34. Sabemos que:

$(a-b)^2=0 \Rightarrow a^2-2ab+b^2=0$

$a^2+b^2=2ab \Rightarrow \dfrac{a^2+b^2}{ab}=2$ ...(I)

$(b+c)^2=0 \Rightarrow b^2+c^2+2bc=0$

$b^2+c^2=-2bc \Rightarrow \dfrac{b^2+c^2}{bc}=-2$ ...(II)

$(a+c)^2=0 \Rightarrow a^2+c^2+2ac=0$

$a^2+c^2=-2ac \Rightarrow \dfrac{a^2+c^2}{ac}=-2$ ...(III)

Sumamos (I), (II) y (III):

$$\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{b^2+c^2}{bc}+\frac{a^2+c^2}{ac}=-2$$

Luego:

$a-b=0 \Rightarrow a=b$

$b+c=0 \Rightarrow b=-c$

$a+c=0 \Rightarrow a=-c$

Nos piden:

$$P=\frac{(a+b+c)^6-(a^6+b^6+c^6)}{(ab)^3+(bc)^3+(ac)^3}$$

Reemplazamos:

$$P=\frac{a^6-(a^6+a^6+a^6)}{(a^2)^3+(-a^2)^3+(-a^2)^3}$$

$$\therefore\ P=\frac{-2a^6}{-a^6}=2$$

Clave B

35. $$F(x)=\frac{x^3+bx^2-abx-a^3}{x^3+3ax^2-4a^2x+b}$$

Si $x=a \Rightarrow f(a)=?$

Entonces el numerador (N) y denominador (D) tienen como factor a $(x-a)$. Por Ruffini:

	1	b	$-ab$	$-a^3$
x = a		a	a^2+ab	a^3
	1	(a + b)	a^2	0

$\Rightarrow q_1(x)=x^2+(a+b)x+a^2$

	1	3a	$-4a^2$	b
x = a		a	$4a^2$	0
	1	4a	0	0

$\Rightarrow b=0$

Luego:

$q_2(x)=x^2+4ax$

$$F(x)=\frac{(x-a)(x^2+(a+0)x+a^2)}{(x-a)(x^2+4ax)}$$

$$F(x)=\frac{x^2+ax+a^2}{x^2+4ax} \quad ...(1)$$

Reemplazamos $x=a$ en (1):

$$\therefore F(a)=\frac{a^2+a^2+a^2}{a^2+4a^2}=\frac{3}{5}$$

Clave C

36. $$\frac{6x^2-2x-2}{x(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}$$

$6x^2-2x-2=Ax(x+1)+B(x^2-1)+Cx(x-1)$

$x=1$: $6-2-2=2A \Rightarrow A=1$

$x=0$: $-2=-B \Rightarrow B=2$

$x=-1$: $6+2-2=2C \Rightarrow C=3$

Nos piden:

$$\frac{ABC}{x(x^2-1)}=\frac{6}{x(x^2-1)}$$

Clave D

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 41) Unidad 2

Comunicación matemática

1.

2.

Razonamiento y demostración

3. $M = \left(\frac{83.82.81!}{81! + 82.81!}\right)\left(\frac{40! + 40!.41}{40!.41.42}\right)$

$M = \frac{81!(82.83)}{81!(1+82)} \cdot \frac{40!(1+41)}{40!.41.42}$

$\Rightarrow M = \left(\frac{82.83}{83}\right)\left(\frac{42}{41.42}\right) = \frac{82}{41}$

$\therefore$ M = 2

Clave A

4. $P(x) = (ax - \frac{1}{x})^6$

$t_{central} = t_{\frac{n}{2}+1} = t_{\frac{6}{2}+1} = t_4 = \frac{5}{2}$

$t_{central} = t_{3+1} = C_3^6\ (ax)^{6-3}\ .\ (-x^{-1})^3$

$t_{central} = -C_3^6\ a^3\ .\ x^0 = -C_3^6\ a^3$

Sabemos que:

$-C_3^6\ a^3 = \frac{5}{2} \Rightarrow 20a^3 = -\frac{5}{2}$

$a^3 = -\frac{1}{8}\ \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

Clave D

5. Degradando el primer miembro tenemos:

$5.\frac{n}{5}C_4^{n-1} = nC_3^{n-1}$

$nC_4^{n-1} = nC_3^{n-1}$

$C_4^{n-1} = C_3^{n-1}$

De donde se cumple: 4 + 3 = n – 1

$\therefore$ n = 8

Clave C

6. $40C_a^{18} = 51C_a^{16}$

$40\ .\ \frac{18!}{a!(18-a)!} = 51\frac{16!}{a!(16-a)!}$

Desarrollamos y simplificamos:

$40.\frac{18.17.16!}{(18-a)(17-a)(16-a)!} = 51.\ \frac{16!}{(16-a)!}$

$\frac{18.17}{(18-a)(17-a)} = \frac{51}{40}$

$\Rightarrow 240 = (n-18)(n-17)$

Cumple para: n = 2

Clave C

7. $t_{k+1} = C_k^4\,(ax^3)^{4-k}\left(\frac{2y}{x^2}\right)^k$

$t_{k+1} = C_k^4\ 2^k a^{4-k} x^{12-5k} y^k = 24x^n y^n$ ...(1)

De (1):

- $12 - 5k = k \Rightarrow k = 2$
- $C_k^4\,2^k\ .\ a^{4-k} = 24$

  $C_2^4 . 2^2 . a^{4-2} = 24$

  $a^2 = 1$

$\therefore\ a = 1\ \vee\ a = -1$

Clave E

8. $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12}$

$t_{central} = t_{\frac{n}{2}+1} = t_{\frac{12}{2}+1} = t_7$

$t_7 = t_{6+1} = C_6^{12}\,(x^2)^{12-6}\left(\frac{1}{x}\right)^6$

$t_7 = C_6^{12} x^6$

coef. $t_7 = C_6^{12} = \frac{12!}{6!6!} = 924$

Clave B

Resolución de problemas

9. $t_{k+1} = C_k^n\,(3x^3)^{n-k}\left(\frac{y^2}{x}\right)^k$

$t_{k+1} = C_k^n 3^{n-k} x^{3(n-k)} y^{2k}\ .\ x^{-k}$

$t_{k+1} = C_k^n 3^{n-k} x^{3n-4k} y^{2k}$ ...(1)

Del enunciado:

- $2k = 8 \Rightarrow k = 4$
- $3n - 4k = 5$

  $3n - 16 = 5$

  $\Rightarrow n = 7$

$\therefore$ n.° términos = n + 1 = 8

Clave A

10. $P(x) = (x+1)^8 - (x^2+a)^4 - 8x^7$

$P(x) = C_0^8\ x^8 + C_1^8\ x^7 + C_2^8\ x^6 + ... + C_8^8 - (C_0^4\ (x^2)^4 + C_1^4 (x^2)^3\ .\ a + ...) - 8x^7$

$P(x) = C_0^8\ x^8 + C_2^8\ \ x^6 + ... + C_8^8 - (C_0^4\ x^8 + C_1^4 x^6 a + ...)$

Para que el polinomio sea de 5.° grado

$\Rightarrow C_2^8 = aC_1^4$

$\frac{8 \times 7}{2} = a(4)$

$a = 7$

Clave A

Nivel 2 (página 41) Unidad 2

Comunicación matemática

11. EL TRIÁNGULO DE PASCAL NOS SIRVE PARA OBTENER LOS COEFICIENTES DEL DESARROLLO DE UN BINOMIO DE EXPONENTE NATURAL DONDE LA SUMA DE DOS TÉRMINOS DE UNA FILA GENERA UN TÉRMINO PARA LA FILA SIGUIENTE.

12.

- De $(x + a)^n$, $n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$ n.° términos = n + 1

  Luego: $(m + n)^{10} \Rightarrow$ n.° términos = 10 + 1 = 11 (V)
- De $P(x', y) = (x + y)^n \Rightarrow \Sigma$coef. $= 2^n$

  Luego: Σcoef. $= 2^{10} = 1024$ (F)
- $t_c = t_{\frac{10}{2}+1} = t_6 = C_5^{10} m^5 n^5 = 252m^5n^5$ (F)
- $t_7 = t_{6+1} = C_6^{10}\,m^4\,n^6 = 210m^4n^6$ (V)

Clave E

Razonamiento y demostración

13. $H = \sqrt[\sqrt{1+2+6}]{\frac{25!}{25!(1+26+26.27)}}$

$H = \sqrt[\sqrt{9}]{\frac{1}{27(1+26)}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27^2}} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{27}}\right)^2$

$\Rightarrow H = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$\therefore\ H = \frac{1}{9}$

Clave D

14. $\binom{15}{x^2} = \binom{15}{2x}$

$x^2 = 2x \Rightarrow\ x = 0\ \vee\ x = 2$

$x^2 + 2x = 15$

$x^2 + 2x - 15 = 0$

x ⟍⟋ 5 } x = –5

x ⟋⟍ –3 } x = 3

CS = {0; 2; 3}

Clave D

15. Por propiedad:

$C_p^m C_0^n + C_{p+1}^m C_1^n + ... + C_{p+n}^m C_n^n = C_{p+n}^{m+n}$

En nuestro ejercicio:

$\therefore C_0^{10} C_5^{15} + C_1^{10} C_6^{15} + C_2^{10} C_7^{15} + ...$

$+ C_{10}^{10} C_{15}^{15} = C_{15}^{10+15} = C_{15}^{25}$

Clave E

16. Por la propiedad vista en el problema 15:

$E = C_p^{m+n}$

Clave B

17. De la expansión: $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$

Sea el término independiente: TI

$TI = t_{k+1} = C_k^9\,(x^2)^{9-k}\,(-x^{-1})^k$

$TI = (-1)^k C_k^9\ x^{18-3K}$

Pero, por dato:

$18 - 3k = 0\ \Rightarrow\ k = 6$

Reemplazamos:

$TI = (-1)^6 C_6^9 = 84$

Clave E

18. $P(x) = \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$

Sea:

$t_{k+1} = C_k^{14} x^{14-k}\left(-x^{-\frac{1}{2}}\right)^k$

$t_{k+1} = (-1)^k\ C_k^{14}\ x^{14-k-\frac{k}{2}}$

Dato:

$14 - k - \frac{k}{2} = 2 \Rightarrow k = 8$

$\therefore$ El lugar es el noveno.

Clave A

Resolución de problemas

19. $(a + 4b + c)^n(a - 2b + c)^n$

$= (a + b + c + 3b)^n(a + b + c - 3b)^n$

$= [(a + b + c)^2 - (3b)^2]^n$

$t_{k+1} = C_k^n((a + b + c)^2)^{n-k}(-(3b)^2)^k$

$t_{k+1} = C_k^n(a + b + c)^{2(n-k)}(-9^k)b^{2k}$ ...(1)

Del enunciado:

$2(n - k) - 14 = k + 1 = \frac{n}{3}$ ...(2)

De (2):

$2n - 2k - 14 = k + 1$

$2n - 15 = 3k$

$\frac{2n-15}{3} = k$ ...(3)

Reemplazamos (3) en (2):

$\frac{2n-15+3}{3} = \frac{n}{3} \Rightarrow n = 12$

Reemplazamos n = 12 en (2): k = 3

Reemplazamos n = 12 y k = 3 en (1):

$t_4 = C^{12}_3(a+b+c)^{18} . -9^3 . b^6$

$\therefore$ Coeficiente es: $-9^3C^{12}_3 = -220(3^6)$

Clave B

20. $M = \left(3\sqrt{\frac{x}{9}+1}\right)(x+1)^{-1}$

$M = 3\left(1+\frac{x}{9}\right)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-1}$

Analizamos por partes:

- $\left(1+\frac{x}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = C^{1/2}_0 + C^{1/2}_1\left(\frac{x}{9}\right) + \underbrace{C^{1/2}_2\left(\frac{x}{9}\right)^2 + ...}_{0}$

$\Rightarrow \left(1+\frac{x}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}.\frac{x}{9}$

- $(1+x)^{-1} = C^{-1}_0 + C^{-1}_1x + \underbrace{C^{-1}_2x^2 + ...}_{0}$

$\Rightarrow (1+x)^{-1} = 1 - x$

Luego:

$\Rightarrow M = 3\left(1+\frac{x}{18}\right)(1-x) = 3\left(1+\frac{x}{18} - x - \underbrace{\frac{x^2}{18}}_{0}\right)$

$\therefore M = 3\left(1 - \frac{17}{18}x\right) = 3 - \frac{17}{6}x$

Clave A

Nivel 3 (página 42) Unidad 2

Comunicación matemática

21. **Clave D**

Razonamiento y demostración

22. Expresamos en función de n!:

$$\frac{(n+1)n! \times n!}{(n+1)n! - n!} = 99(n-2)!$$

$$\frac{(n+1)n! \times n!}{n!(n+1-1)} = 99(n-2)!$$

$$\frac{(n+1).n!}{n} = 99(n-2)!$$

$$\frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)!}{n} = 99(n-2)!$$

$(n+1)(n-1) = 99$

$n^2 - 1 = 99$

$n^2 = 100$

$\therefore n = 10$

Clave B

23. $\left(\frac{4}{x}+\frac{x}{8}\right)^{12}$

Sea:

$t_{central} = t_{\frac{12}{2}+1} = t_7$

$t_{6+1} = C^{12}_6\left(\frac{4}{x}\right)^6\left(\frac{x}{8}\right)^6$

$t_7 = C^{12}_6\frac{4^6}{8^6} = C^{12}_6\left(\frac{4}{8}\right)^6 = C^{12}_6\left(\frac{1}{64}\right)$

Sabemos que: $C^{12}_6 = 924$

Luego: $t_7 = \frac{924}{64} = \frac{231}{16}$

Clave C

24. $C^x_{y+1} = C^x_{y-1}$

$x = y + 1 + y - 1 \Rightarrow x = 2y$ ...(I)

$C^x_y = \frac{21}{10}C^x_{y-2} \Rightarrow 10C^x_y = 21C^x_{y-2}$

Reemplazamos:

$10C^{2y}_y = 21C^{2y}_{y-2}$

$$\frac{10\,(2y)!}{y!\,y!} = \frac{21\,(2y)!}{(y+2)!\,(y-2)!}$$

$$\frac{10\,(2y)!}{y!\,y(y-1)(y-2)!} = \frac{21\,(2y)!}{(y+2)(y+1)y!\,(y-2)!}$$

Multiplicamos se tiene:

$11y^2 - 51y - 20 = 0$

$11y \quad\quad 4 \quad y = -4/11$

$y \quad\quad -5 \quad y = 5$

De I: x = 2(5) = 10

Clave D

25. Sea la expansión: $(x+1)^{40}$

$t_{(2r+1)} = C^{40}_{2r}\ x^{40-2r}(1)^{2r}$

$t_{r+2} = t_{(k+1+1)} = C^{40}_{r+1}\ x^{40-r-1}(1)^{r+1}$

Dato:

$(1)^{2k}C^{40}_{2r} = (1)^{r+1}C^{40}_{r+1}$

$C^{40}_{2r} = C^{4}_{r+1}$

Por propiedad:

$C^n_k = C^n_{n-k}$

$\Rightarrow 2r + r + 1 = 40 \Rightarrow r = 13$

Clave A

26. $f(x) = \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^6$

Sea el lugar independiente:

$t_{k+1} = C^6_k\left(\frac{x}{3}\right)^{6-k}\left(-\frac{3}{x}\right)^k$

Reducimos:

$t_{k+1} = C^6_k(-1)^k . 3^{2k-6} . x^{6-2k}$

Como es término independiente:

$\Rightarrow 6 - 2k = 0 \Rightarrow k = 3$

Reemplazamos:

$TI = -C^6_3 = -20$

Clave C

27. Dato:

$t_3 + t_6 = 0$

$C^7_2(3x)^5\left(\frac{2}{3}\right)^2 + C^7_5(3x)^2\left(\frac{2}{3}\right)^5 = 0$

Se comprueba que: $C^7_2 = C^7_5$

Entonces:

$(3x)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left[(3x)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3\right] = 0$

$\Rightarrow (3x)^3 = -\frac{8}{27} \Rightarrow 27x^3 = -\frac{8}{27}$

$\Rightarrow x^3 = \frac{-2^3}{9^3} = \frac{(-2)^3}{9^3}$

$\therefore x = -\frac{2}{9}$

Clave A

Resolución de problemas

28. $\left(6 + \sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}}\right)^4 = \left(\frac{6\sqrt{x} + x + 9}{\sqrt{x}}\right)^4$

$\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt[4]{x}}\right)^8 = \left(\sqrt[4]{x} + \frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right)^8$

$t_{k+1} = C^8_k(\sqrt[4]{x})^{8-k}\left(\frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right)^k$ ...(1)

$t_{k+1} = C^8_kx^{2-\frac{k}{2}}.3^k$

Para que sea racional fraccionario:

$2 - \frac{k}{2} < 0 \Rightarrow k > 4$

$\Rightarrow k \in \{5; 6; 7; 8\}$

Evaluamos en (1):

$k = 6 \ \wedge \ k = 8$

Reemplazamos los valores de k en (1):

$\Rightarrow t_7 = C^8_6x^{2-\frac{6}{2}}3^6 = 28 . 3^6x^{-1}$

$\Rightarrow t_9 = C^8_8x^{2-\frac{8}{2}}3^8 = 3^8x^{-2}$

$\therefore \frac{t_7}{t_9} = \frac{28.3^6x^{-1}}{3^8x^{-2}} = \frac{28x}{9}$

Clave D

29. $\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^x$

Dato:

$\frac{t_7}{t_7} = \frac{1}{6}$ ...(I)

Luego:

$t_7 = t_{6+1} = C^x_6\sqrt[3]{2}^{x-6}.\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^6$

$t_7 = t_{6+1} = C^x_6\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{x-6}.\sqrt[3]{2}^6$

Reemplazamos en (I):

$$\frac{C^x_6 2^{\frac{x-6}{3}}.3^{-2}}{C^x_6 3^{-\frac{x-6}{3}}.2^2} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{2^{\frac{x}{3}}.2^{-2}.3^{-2}}{3^{-\frac{x}{3}}.3^2.2^2} = \frac{1}{6}$$

Reducimos:

$2^{\frac{x}{3}-3} = 3^{-\frac{x}{3}+3}$

Luego:

$\frac{x}{3} - 3 = 0 \Rightarrow x = 9$

Clave D

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 45) Unidad 2

Comunicación matemática

1. Los conceptos son:
RADICALES DOBLES
RACIONALIZACIÓN
RADICACIÓN

2. La alternativa B coincide exactamente con la memorizada.

Razonamiento y demostración

3. $\frac{12}{\sqrt[3]{3}} + \frac{18}{6}.\sqrt[3]{9}$

$= \frac{12.\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{3^2}} + 3.\sqrt[3]{9}$

$= \frac{12.\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}} + 3.\sqrt[3]{9}$

$= \frac{12}{3}.\sqrt[3]{9} + 3\sqrt[3]{9} = 7\sqrt[3]{9}$

Clave E

4. $A = \frac{8}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}$

$A = \frac{8.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} + \frac{1.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} + \frac{3.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}$

$A = \frac{8\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$A = \frac{8\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

Clave C

5. Racionalizamos:

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left[\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} + \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}\right]$

$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right] = \sqrt{2}$

Clave A

6. $R = \left[\sqrt{12 - \sqrt{4.35}} + \sqrt{5}\right].\sqrt{7}$

$R = \left[\sqrt{\underbrace{12}_{7+5} - 2\sqrt{\underbrace{35}_{7.5}}} + \sqrt{5}\right].\sqrt{7}$

$R = \left[\sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{5}\right].\sqrt{7}$

$R = \sqrt{7}.\sqrt{7} = 7$

Clave D

7. $\sqrt{12 + 2\sqrt{27}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{12}}$

$9+3 \quad 9\times 3 \quad 4+3 \quad 4\times 3$

$(\sqrt{9} + \sqrt{3}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3})$

$3 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 5$

Clave E

8. $N = \sqrt{18 + 2\sqrt{32}} + \sqrt{11 - 2\sqrt{18}}$

$16+2 \quad 16.2 \quad 9+2 \quad 9.2$

$N = (\sqrt{16} + \sqrt{2}) + (\sqrt{9} - \sqrt{2})$

$N = 4 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = 7$

Clave C

9. $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + 1 = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + 1$

$= \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}^2)-1} + 1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + 1 = \sqrt{2} - 1 + 1 = \sqrt{2}$

Clave B

Resolución de problemas

10. $\sqrt{11\sqrt{2} - 12} = \sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\theta}$

$\sqrt{\sqrt{2}(11 - 2\sqrt{18})} = \sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\theta}$

$\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{(9+2) - 2\sqrt{9.2}}\right) = \sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\theta}$

$\sqrt[4]{2}(\sqrt{9} - \sqrt{2}) = \sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\theta}$

$\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{81} - \sqrt[4]{2}.\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\theta}$

$\sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\theta}$

$\Rightarrow \alpha = 162 \wedge \theta = 8$

$\therefore \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\theta}} = \sqrt[4]{\frac{162}{8}} = \sqrt[4]{\frac{81}{4}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Clave D

11. $Z = \frac{3}{\sqrt{64 + 8\sqrt{63}} - \sqrt{\sqrt{233 + 88\sqrt{7}}}} = \frac{3}{6 + 2\sqrt{7} - \sqrt{11 + 2\sqrt{28}}}$

$Z = \frac{3}{6 + 2\sqrt{7} - (2 + \sqrt{7})} = \frac{3}{\sqrt{7} + 4} = \frac{3}{4 + \sqrt{7}}\left(\frac{4 - \sqrt{7}}{4 - \sqrt{7}}\right)$

$Z = \frac{1}{3}(4 - \sqrt{7})$

Por dato: $\frac{1}{3}(a - \sqrt{b}) = \frac{1}{3}(4 - \sqrt{7})$

Donde: $a = 4$, $b = 7$

Luego: $a^{b-a} = 4^{7-4} = 4^3 = 2^6 = 64$

Clave C

Nivel 2 (página 45) Unidad 2

Comunicación matemática

12. A) IV B) II C) I D) III

13. A) NO B) SÍ C) SÍ

Razonamiento y demostración

14. $E = \frac{7}{\sqrt{5}} - \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{7.\sqrt{5}}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} - \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$E = \frac{7\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

Clave A

15. $L = \frac{17}{\sqrt{3}} - \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{12}{\sqrt{3}}$

$L = \frac{17.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} - \frac{8.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} + \frac{12.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}$

$L = \frac{17.\sqrt{3}}{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3} + \frac{12.\sqrt{3}}{3}$

$L = \frac{21\sqrt{3}}{3} = 7\sqrt{3}$

Clave B

16. $P = \frac{m - 49}{m + 4\sqrt{m} - 21}$

Dando forma:

$P = \frac{m - 49}{\sqrt{m}^2 + 4\sqrt{m} + 4 - 25} = \frac{m - 49}{(\sqrt{m} + 2)^2 - 5^2}$

$P = \frac{m - 49}{(\sqrt{m} + 7)(\sqrt{m} - 3)}$

Racionalizamos:

$P = \frac{(m - 49)(\sqrt{m} - 7)(\sqrt{m} + 3)}{(\sqrt{m} + 7)(\sqrt{m} - 3)(\sqrt{m} - 7)(\sqrt{m} + 3)}$

$P = \frac{(m - 49)(\sqrt{m} - 7)(\sqrt{m} + 3)}{(m - 49)(m - 9)}$

$P = \frac{(\sqrt{m} - 7)(\sqrt{m} + 3)}{m - 9}$

Clave A

17. $K = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(2\sqrt{2} - 3)^2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

Desarrollando:

$K = \sqrt{7 - 2.2\sqrt{3}} + \sqrt{17 - 2 \times 6\sqrt{2}} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

Dando forma:

$K = \sqrt{7 - 2\sqrt{4.3}} + \sqrt{17 - 2\sqrt{9.8}} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

$K = \sqrt{4} - \sqrt{3} + \sqrt{9} - \sqrt{8} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

$K = 2 + 3 = 5$

Clave D

18. $M = \frac{5}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{8}}$

Racionalizamos:

$M = \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{8})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{8})(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{8})}$

$M = \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{8})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{8})^2}$

$M = \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{8})}{8 + 2\sqrt{15} - 8}$

$M = \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{8})\sqrt{15}}{2\sqrt{15} \times \sqrt{15}}$

$M = \frac{5 \times \sqrt{15}(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{8})}{2 \times 15}$

$M = \frac{\sqrt{15}(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{8})}{6}$

Clave C

19. $T = \sqrt[(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})]{(17 - 2\sqrt{72})}$

$T = \sqrt[4]{17 - 2\sqrt{9 \times 8}} = \sqrt{\sqrt{17 - 2\sqrt{9 \times 8}}}$

$T = \sqrt{\sqrt{9} - \sqrt{8}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

Clave B

20. $E = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\sqrt{3} + 1}.\sqrt[6]{16 - 2\sqrt{48}}$

$= \sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{\sqrt{3} + 1}.\sqrt[3]{\sqrt{16 - 2\sqrt{12.4}}}$

$= \sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{\sqrt{3} + 1}.\sqrt[3]{\sqrt{12} - \sqrt{4}}$

$= \sqrt[3]{2\sqrt{3} + 2}\ .\ \sqrt[3]{2\sqrt{3} - 2}$

$= \sqrt[3]{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = \sqrt[3]{8} = 2$

Clave A

Resolución de problemas

21. Según datos del problema:

$$\frac{\frac{1 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} + \frac{3 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}}{\frac{1 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} + \frac{5 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}} = \frac{8}{57}\left(12\sqrt{15} - 25\sqrt{3}\right)$$

$$= K(12\sqrt{\alpha} - 25\sqrt{\beta})$$

Donde: $\alpha = 15 \wedge \beta = 3$

Luego:

$E = \left(\frac{15}{3}\right)^{10\left(\frac{3}{15}\right)}$

$\therefore E = 25$

Clave B

22. Según el enunciado:

$$\frac{4}{\sqrt{10 - \sqrt{84}}} + \frac{3}{\sqrt{9 + \sqrt{72}}} = \frac{1}{\sqrt{13 - 2\sqrt{\overline{ab}}}}$$

Transformamos los radicales dobles a simples en el primer miembro de la ecuación:

$$\frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{13 - 2\sqrt{\overline{ab}}}}$$

Racionalizamos el primer miembro:

$$(\sqrt{7} + \sqrt{3}) + (\sqrt{6} - \sqrt{3}) = \frac{1}{\sqrt{13 - 2\sqrt{\overline{ab}}}}$$

$$\sqrt{7} + \sqrt{6} = \frac{1}{\sqrt{13 - 2\sqrt{\overline{ab}}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{13 - 2\sqrt{\overline{ab}}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{13 - 2\sqrt{42}}} = \frac{1}{\sqrt{13 - 2\sqrt{\overline{ab}}}}$$

Observamos que $\overline{ab} = 42 \Rightarrow a = 4 \wedge b = 2$

Nos pide: $a^b = 4^2 = 16$

Clave D

Nivel 3 (página 46) Unidad 2

Comunicación matemática

23. $\sqrt{6 + \sqrt{20}} = 1 + \sqrt{5}$ y $\sqrt{9 + \sqrt{60}} = 2 + \sqrt{5}$

Luego:

$P = \frac{3 + 2(1 + \sqrt{5})}{2 + \sqrt{5}} = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{5} + 2}\left(\frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} - 2}\right)$

$= \frac{5\sqrt{5} - 10 + 10 - 4\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$

$\Rightarrow P^4 = 25$

Clave E

24. La proposición incorrecta es la C.

Razonamiento y demostración

25.

$$E=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}}\cdot\frac{2}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$E=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

$$E=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

$$E=\frac{4.3}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}-1)}$$

$$E=\frac{12}{\sqrt{2}.\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$E=\frac{12}{\sqrt{6}.2}=\frac{6}{\sqrt{6}}\Rightarrow E=\sqrt{6}$$

Clave B

26. $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}+\frac{1}{\sqrt{5}-2}+\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}-3}$

Racionalizamos:

$$\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}+\frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}-\frac{(\sqrt{5}+3)^2}{(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3)}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}+\frac{\sqrt{5}+2}{1}-\frac{(\sqrt{5}+3)^2}{4}$$

$$=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}+\sqrt{5}+2-\frac{14+6\sqrt{5}}{4}$$

$$=\sqrt{5}+2-2-\sqrt{5}=0$$

Clave E

27. Factorizamos el denominador:

$$P=\frac{m-25}{(\sqrt{m}+5)(\sqrt{m}+2)}$$

Racionalizamos:

$$P=\frac{(m-25)(\sqrt{m}-5)(\sqrt{m}-2)}{(\sqrt{m}+5)(\sqrt{m}-5)(\sqrt{m}+2)(\sqrt{m}-2)}$$

$$P=\frac{(m-25)(\sqrt{m}-5)(\sqrt{m}-2)}{(m-25)(m-4)}$$

$$\therefore P=\frac{(\sqrt{m}-5)(\sqrt{m}-2)}{m-4}$$

Clave A

28. $\sqrt{m+\sqrt{396-216\sqrt{2}}}+\sqrt{n}=\sqrt{6}$

Dando forma:

$$\sqrt{m+\sqrt{396-2\sqrt{2\times108^2}}}+\sqrt{n}=\sqrt{6}$$

$$\sqrt{m+\sqrt{396-2\sqrt{2\times144\times81}}}+\sqrt{n}=\sqrt{6}$$

$$\sqrt{m+\sqrt{396-2\sqrt{324\times72}}}=\sqrt{6}-\sqrt{n}$$

Pasando a radicales simples:

$$\sqrt{m+\sqrt{324}-\sqrt{72}}=\sqrt{6}-\sqrt{n}$$

$$\sqrt{m+18-2\sqrt{18}}=\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{n})^2}$$

$$\sqrt{m+18-2\sqrt{18}}=\sqrt{6+n-2\sqrt{6n}}$$

$$m+18-2\sqrt{18}=6+n-2\sqrt{6n}$$

Identificamos términos:

$6n=18\Rightarrow n=3$

$m+18=6+n$

$m+18=6+3\Rightarrow m=-9$

Nos piden:

$m^2+n^2=81+9=90$

Clave D

29. $B=\frac{1}{\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{40}}$

$$B=\frac{1}{\sqrt[3]{2^3.3}+\sqrt[3]{2^3.5}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}$$

$$B=\frac{(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25})}{2(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25})}$$

$$B=\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25}}{16}$$

Clave C

30.

$$\frac{8}{\underbrace{\left(1-\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{2^2}+\sqrt[5]{2^3}-\sqrt[5]{2^4}\right)}_{\frac{(\sqrt[5]{2})^5+1^3}{(\sqrt[5]{2})+1}}}=\frac{8(\sqrt[5]{2}+1)}{3}$$

$\therefore$ El denominador es 3.

Clave D

Resolución de problemas

31. Racionalizamos cada fracción:

$$\frac{2(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}+\frac{4(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}-\frac{3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{(3\sqrt{3}+3\sqrt{2})(3\sqrt{3}-3\sqrt{2})}$$

Reducimos:

$$\frac{3\sqrt{3}+30\sqrt{2}}{9}=\frac{\sqrt{3}+10\sqrt{2}}{3}$$

Clave B

32. Lo planteado se puede expresar como:

$$\sqrt{\sqrt{m}^3+\sqrt{n}\,t^3+\sqrt{m^6+2pr^3t^3+mt^6}}=\lambda\sqrt{r^3+t^3}$$

Donde:

$$\lambda=\sqrt{\frac{\sqrt{m}\,r^3+\sqrt{n}\,t^3+\sqrt{mr^6+2pr^3t^3+mt^6}}{r^3+t^3}}\quad...(1)$$

En el radicando de resto cero: $r^3=-t^3$

$$R=\sqrt{m}(-t^3)+\sqrt{n}\,t^3+\sqrt{nt^6-2pt^6+mt^6}=0$$

$$(\sqrt{n}-\sqrt{m})t^3+t^3\sqrt{n-2p+m}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\sqrt{n}=\sqrt{m}\Rightarrow n=m\\ n-2p+m=0\Rightarrow m=p\end{array}\right\}\ m=n=p$$

Luego, reemplazamos en (1) pero en función de “n”.

$$\lambda=\sqrt{\frac{\sqrt{n}(t^3+r^3)+\sqrt{nr^6+2nr^3t^3+nt^6}}{r^3+t^3}}$$

$$\lambda=\sqrt{\frac{\sqrt{n}(t^3+r^3)+\sqrt{n}(r^3+t^3)}{r^3+t^3}}=\sqrt{2\sqrt{n}}$$

$$\lambda=\sqrt{\sqrt{2^2}\sqrt{n}}=\sqrt{\sqrt{4}\sqrt{n}}=\sqrt[4]{4n}$$

Clave C

33. $\sqrt{0,00x}+\sqrt{0,00y}=\sqrt{0,005+\sqrt{0,000024}}$

$$\sqrt{1000}\,(\sqrt{0,00x}+\sqrt{0,00y})=\sqrt{1000}\sqrt{0,005+\sqrt{0,000024}}$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{5+\sqrt{24}}$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

Como: $x>y\Rightarrow x=3\wedge y=2$

En P:

$$P=\sqrt{2(3)-3\sqrt{2}+1}=\sqrt{6-3\sqrt{3}}=\sqrt{6-\sqrt{27}}$$

$$=\sqrt{\frac{6+\sqrt{6^2-27}}{2}}-\sqrt{\frac{6-\sqrt{6^2-27}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Hay dos alternativas de respuesta:

1.ª alternativa: $\sqrt{\frac{9}{2}}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-\sqrt{3}$

2.ª alternativa: $-\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\frac{2}{9}}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 50) Unidad 3

Comunicación matemática

1. I. $z \in \mathbb{C}$: los módulos son iguales

Para: $|z| = |z^*|$ (V)

II. $|z + i| = |(z + i)^*| = |z^* + i^*|$
$= |z^* - i|$ (V)

III. $|z| = |z||z|$ (F)

2. $\sqrt[3]{1}\begin{cases} i \\ w \\ w^2 \end{cases}$

I. w, w^2

II. $1 + w + w^2 = 0$

III. $1 \, . \, w \, . \, w^2 = w^3 = 1$

$\Rightarrow$ I. (V) II. (F) III. (V)

Razonamiento y demostración

3. $i^{2^{2^{2^2}}} = i^{2^{2^4}} = i^{2^{16}} = i^{2^2 . \, 2^{14}} = (i^4)^{2^{14}} = 1$

$i^{5^{5^{5^5}}} = i^{(\overset{\circ}{4} + 1)5^{5^5}} = i^{\overset{\circ}{4}+1} = i$

Nos piden:

$i^{2^{2^{2^2}}} + i^{5^{5^{5^5}}} = 1 + i$

Clave A

4. $R = i^{\overset{\circ}{4}+3} + i^{\overset{\circ}{4}+3} + i^{\overset{\circ}{4}+2} + i^{\overset{\circ}{4}}$

$R = i^3 + i^3 + i^2 + 1$

$R = -i + -i + (-1) + 1 \Rightarrow R = -2i$

Clave C

5. Si:

$\sqrt{A + Bi} = x + yi$

$A + Bi = (x + yi)^2$

$A + Bi = x^2 - y^2 + 2xyi$

Donde:

$A = x^2 - y^2$

$B = 2xy$

Nos piden:

$P = \left[\dfrac{B^2}{y^2A + y^4}\right]^2 = \left[\dfrac{B^2}{y^2(A + y^2)}\right]^2$

Reemplazando:

$P = \left[\dfrac{(2xy)^2}{y^2(x^2)}\right]^2 = \left[\dfrac{4x^2y^2}{x^2y^2}\right]^2 = [4]^2$

$\therefore P = 16$

Clave D

6. $z_1 = 5i^5 - [(1 + i)^2]^2 + 2(-i)$

$z_1 = 5i - [2i]^2 - 2i$

$z_1 = 5i - 4i^2 - 2i$

$z_1 = 5i - 4i^2 - 2i$

$z_1 = 3i - 4 \times (-1) = 3i + 4$

$|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25}$

$|z_1| = 5$

Clave C

7. $z_1 = \sqrt{-2\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)} = \sqrt{-2(-i)}$

$z_1 = \sqrt{2i} = \sqrt{(1+i)^2} = 1 + i$

Clave B

8. $F = (1 + i)^3 + (1 - i)^3$

$F = (1 + i)^2(1 + i) + (1 - i)^2(1 - i)$

$F = 2i(1 + i) + (-2i)(1 - i)$

$F = 2i - 2 - 2i - 2$

$F = -4$

Clave B

9. Dato:

$z_1 + z_2 = z_2 + z_3 = z_3 + z_1$

Igualando se tiene:

$z_1 = z_2 = z_3 = z$

Nos piden:

$\dfrac{(z_1 - iz_2)^4 + (z_3 + iz_2)^4}{\left[z_1 + z_3 + i(z_2 - z_1)\right]^4}$

Reemplazando:

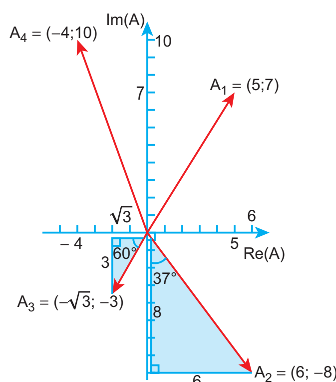
$\dfrac{(z - iz)^4 + (z + iz)^4}{\left[z + z + i(z - z)\right]^4} = \dfrac{z^4\left[(1-i)^4 + (1+i)^4\right]}{[2z]^4}$

$\dfrac{-8}{16} = -\dfrac{1}{2}$

Clave D

Resolución de problemas

10.



Los afijos son expresados como:

$A_1 = (5; 7) = 5 + 7i$

$A_2 = (6; -8) = 6 - 8i$

$A_3 = (-\sqrt{3}; -3) = -\sqrt{3} - 3i$

$A_4 = (-4; 10) = -4 + 10i$

Nos piden:

$P = \dfrac{\left[(6 - 8i) + (-4 + 10i)\right] \times (5 + 7i)}{-\sqrt{3} - 3i}$

$P = \dfrac{(2 + 2i)(5 + 7i)}{-(\sqrt{3} + 3i)} = \dfrac{-4 + 24i}{-(\sqrt{3} + 3i)}$

$P = \dfrac{4 - 24i}{\sqrt{3} + 3i} = \dfrac{\sqrt{3} - 18}{3} - (1 + 2\sqrt{3})i$, IIIC

Clave C

11. $(M + Ni)i = 3 - 4i \Rightarrow Mi - N = 3 - 4i$

$\left.\begin{matrix} M = -4 \\ N = -3 \end{matrix}\right\}$ $M + Ni = -4 - 3i$

$-4 - 3i = 5(\cos 217° + i\text{sen}217°)$

Clave D

Nivel 2 (página 50) Unidad 3

Comunicación matemática

12. I. $e^{2n\pi i} = \underbrace{\cos 2n\pi}_{1} + \underbrace{i\text{sen}2n\pi}_{0}$

$e^{2n\pi i} = 1$ ...(V)

II. $e^{\pi i} = \underbrace{\cos\pi}_{-1} + \underbrace{i\text{sen}\pi}_{0}$

$e^{\pi i} = -1$ ...(V)

III. Sea $z = a + bi$

$e^z = e^{a + bi} = e^a \, . \, e^{bi}$

$= e^a(\cos b + i\text{sen}b)$

Luego:

$\left(\overline{e^z}\right) = \left(\overline{e^a}\right)\left(\overline{\cos b + i\text{sen}b}\right)$

$= e^a\underbrace{(\cos b - i\text{sen}b)}_{e^{-bi}}$

$\left(\overline{e^z}\right) = e^{\bar{z}}$ ...(V)

IV. $\left(2^4\right)^{\frac{1}{3}} \neq \left(8^4\right)^{\frac{1}{4}}$ ...(F)

$\therefore$ VVVF

Clave A

13. I. Sea: $z = (x; y) \in \mathbb{C}$; $x; y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y^2 \geq 0$; por dato $\text{Re}(z) = x = 0$

$\Rightarrow |\text{Im}(z)| \geq 0$

(V)

II. $a^2 + b^2 = 11a$

$|(a - 5{,}5) + bi| = \sqrt{(a - 5{,}5)^2 + b^2}$

$= \sqrt{11a - 11a + (5{,}5)^2} = 5{,}5$

(V)

III. $z = -\cos\theta + i\text{sen}\theta$

$= \cos(\pi - \theta) + i\text{sen}(\pi - \theta)$

$= e^{i(\pi - \theta)}$

(F)

Son verdaderas I y II:

Clave C

Razonamiento y demostración

14. $i^{2^{2^2}} + i^{5^{5^{5^5}}} + i^{3^{3^{3^3}}}$

$= i^{16} + i^{(\overset{\circ}{4}+1)^{5^{5^5}}} + i^{(\overset{\circ}{4}-1)^{3^{3^3}}}$

$= 1 + i^{\overset{\circ}{4}+1} + i^{\overset{\circ}{4}-1}$

$= 1 + i + i^{-1} = 1 + i + \frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i}$

$= 1 + i - i = 1$

Clave A

15. $E = \dfrac{1+i-1-i+1+i}{1+\dfrac{1+i}{1-\dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}}}$

$E = \dfrac{1+i}{1+\dfrac{1+i}{1-\dfrac{2i}{2}}}$

$E = \dfrac{1+i}{1+\dfrac{1+i}{1-i}\dfrac{(1+i)}{(1+i)}}$

$E = \dfrac{1+i}{1+\dfrac{2i}{2}}$

$E = \dfrac{1+i}{1+i} \Rightarrow E = 1$

Clave A

16. $z_1 = \dfrac{(2+3i)}{(3-2i)}\dfrac{(3+2i)}{(3+2i)} = \dfrac{13i}{13} = i$

$z_2 = \dfrac{(6+7i)}{(7-6i)}\dfrac{(7+6i)}{(7+6i)} = \dfrac{85i}{85} = i$

$z_3 = \dfrac{(20+12i)}{(6-10i)}\dfrac{(6+10i)}{(6+10i)} = \dfrac{272i}{136} = 2i$

$z_4 = \dfrac{(18+16i)}{(8-9i)}\dfrac{(8+9i)}{(8+9i)} = \dfrac{290i}{145} = 2i$

Nos piden:

$z = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = i + i + 2i + 2i = 6i$

$\Rightarrow Im(z) = 6$

Clave D

17. Por dato: $z = a + bi$

Además:

$z + i = 2$

$(a + bi) + i = 2$

$a + (b + 1)i = 2$

$\Rightarrow a = 2 \wedge b = -1$

$\Rightarrow z = 2 - i$

Piden:

$|\overline{z+z}| = |\overline{(2+i)+(2-i)}| = 4$

$\therefore |\overline{z+z}| = 4$

Clave C

18. $w_1 = \sqrt[4]{\dfrac{\left((1+i)^2\right)^4(1+i)}{1+i^8\times i}}$

$w_1 = \sqrt[4]{\dfrac{(2i)^4(1+i)}{1+i}} = \sqrt[4]{(2i)^4}$

$w_1 = 2i$

Clave B

19. $i = 0 + i(1) = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}$

$i = e^{\frac{\pi}{2}i}$

$\Rightarrow i^i = (i)^i = \left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^i = e^{\frac{\pi}{2}\cdot i^2} = e^{\frac{\pi}{2}(-1)}$

$\therefore i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$

Clave B

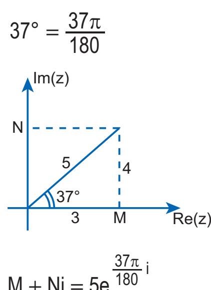
Resolución de problemas

20. $(M + Ni)^2(M + Ni) = (3 + 4i)^3$

$(M + Ni)^3 = (3 + 4i)^3$

$M = 3 \wedge N = 4$

$37° = \dfrac{37\pi}{180}$



$M + Ni = 5e^{\frac{37\pi}{180}i}$

Clave A

21. $\left(\dfrac{z}{\bar{z}}\right)^3 + \left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)^3 = 1$ ...(I)

Sea:

$z = |z|e^{\theta i}$

$\bar{z} = |z|e^{-\theta i}$

$\dfrac{z}{\bar{z}} = \dfrac{|z|e^{\theta i}}{|\bar{z}|e^{-\theta i}} = e^{2\theta i}$

$\dfrac{\bar{z}}{z} = \dfrac{|\bar{z}|e^{-\theta i}}{|z|e^{\theta i}} = e^{-2\theta i}$

Reemplazando en (I):

$(e^{2\theta i})^3 + (e^{-2\theta i})^3 = 1$

$e^{6\theta i} + e^{-6\theta i} = 1$

$\Rightarrow (\cos 6\theta + i\text{sen}6\theta) + (\cos(-6\theta) + i\text{sen}(-6\theta)) = 1$

$\cos 6\theta + i\text{sen}6\theta + \cos 6\theta - i\text{sen}6\theta = 1$

$2\cos 6\theta = 1 \Rightarrow \cos 6\theta = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 6\theta = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow 18\theta = \pi$

Nos piden:

$\cos 18\theta = \cos\pi = -1$

Clave E

Nivel 3 (página 51) Unidad 3

Comunicación matemática

22. Del enunciado:

$\sqrt[6]{1} = \cos\left(\dfrac{0° + 2k\pi}{6}\right) + i\text{sen}\left(\dfrac{0° + 2k\pi}{6}\right) = \phi_k$

Para:

$k = 0 \Rightarrow \phi_0 = 1$

$k = 1 \Rightarrow \phi_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\text{sen}\frac{\pi}{3}$

$k = 2 \Rightarrow \phi_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\text{sen}\frac{2\pi}{3}$

$k = 3 \Rightarrow \phi_3 = \cos\pi + i\text{sen}\pi$

$k = 4 \Rightarrow \phi_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\text{sen}\frac{4\pi}{3}$

$k = 5 \Rightarrow \phi_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\text{sen}\frac{5\pi}{3}$

Sumando las expresiones se obtiene:

$\underbrace{\phi_0}_{1} + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 = 0$

$\Rightarrow \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 = -1$

Por lo tanto, $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5$ es un número real con módulo igual a 1.

Clave E

23. Utilizando el criterio de conversión de radicales dobles a simples:

$\sqrt{80 - 18i} = \sqrt{80 - 18\sqrt{-1}} = \sqrt{\underbrace{80}_{81-1} - 2\underbrace{\sqrt{-81}}_{(81)(-1)}}$

$= \sqrt{81} - \sqrt{-1}$

$= 9 - i$ o también: $i - 9$

$= \sqrt{80 - 18i} = \pm(9 - i)$

$= \pm\sqrt{82}\,e^{i\arctan\left(\frac{-1}{9}\right)}$

Concluimos: VFV

Razonamiento y demostración

24. $R = \sqrt{2\sqrt{i - \sqrt{2\sqrt[9]{i}}}} - 1$

Recuerda que:

$i = i^9$

$(1 + i)^2 = 2i$

Luego:

$R = \sqrt{2\sqrt{i - \sqrt{2\sqrt[9]{i^9}}}} - 1$

$R = \sqrt{2\sqrt{i - \sqrt{2i}}} - 1 = \sqrt{2\sqrt{i - \sqrt{(1+i)^2}}} - 1$

$R = \sqrt{2\sqrt{i - 1 - i}} - 1$

$R = \sqrt{2i} - 1 = \sqrt{(1+i)^2} - 1 = 1 + i - 1$

$R = i$

Clave C

25. $a + bi = \left[(2 - 3i)^{i+1}\right]^{1 - i^{33^{34}}}$

Observación:

$i^{33^{34}} = i^{(\overset{\circ}{4}+1)^{34}} = i^{\overset{\circ}{4}+1} = i$

Luego:

$a + bi = [(2 - 3i)^{1+i}]^{1-i}$

$a + bi = (2 - 3i)^{1^2 - i^2}$

$a + bi = (2 - 3i)^2 = -5 - 12i$

$\Rightarrow a = -5$ y $b = -12$

Nos piden:

$2a - b = 2(-5) - (-12) = 2$

Clave E

26. $\frac{1+ai}{a+i}+\frac{(a+3i)i}{(1-ai)i}=ki$

$\frac{1+ai+ai-3}{a+i}=ki$

$\frac{(-2+2ai)i}{(a+i)i}=ki$

$\frac{2i(-1+ai)}{-1+ai}=ki$

$ki=2i \Rightarrow k=2$

Piden:

$k^4+1=2^4+1=17$

Clave C

27. $\frac{3+2i}{2+\frac{1}{i}\times\frac{i}{i}}+\frac{5-i}{2i}+2i=a+bi$

$\frac{3+2i}{2-i}+\frac{5-i}{2i}+2i=a+bi$

$\frac{(3+2i)}{(2-i)}\times\frac{(2+i)}{(2+i)}+\frac{(5-i)i}{(2i)i}+2i=a+bi$

$\frac{4+7i}{5}-\frac{5i+1}{2}+2i=a+bi$

Reduciendo:

$\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i=a+bi$

Donde:

$a=\frac{3}{10}\ \wedge b=\frac{9}{10}$

Nos piden:

$a+b=\frac{3}{10}+\frac{9}{10}=\frac{12}{10}=1{,}2$

Clave B

28. Sabemos que:

$(1-i)^4=-4 \Rightarrow (1-i)^5=-4(1-i)$

$(1+i)^4=-4 \Rightarrow (1+i)^5=-4(1+i)$

$(1+i)^3=-2(1-i) \Rightarrow (1+i)^6=-8i$

$(1-i)^3=-2(1+i) \Rightarrow (1-i)^6=8i$

Reemplazando:

$k=\frac{-4(1-i)-1}{-4(1+i)+1}-\frac{8i-1}{-8i+1}$

$k=\frac{5-4i}{3+4i}+1=\frac{8}{3+4i}$

Piden:

$|k|=\frac{|8|}{|3+4i|}=\frac{8}{5}=1{,}6$

Clave B

29. $z=\sqrt{2\sqrt{i}-\sqrt{i+\sqrt[17]{i^{17}}}}$

$z=\sqrt{2\sqrt{i}-\sqrt{i+i}}=\sqrt{2\sqrt{i}-\sqrt{2i}}$

Sabemos: $2i=(1+i)^2$

$z=\sqrt{2\sqrt{i}-\sqrt{(1+i)^2}}$

$z=\sqrt{2\sqrt{i}-1-i}=\sqrt{2\sqrt{-1}}$

$z=\sqrt{2i}=\sqrt{(1+i)^2}=1+i$

Clave A

30. Si:

$z=\frac{1+4n^2i}{8n^2-i}$

Luego:

$z-\frac{3}{4}i=\frac{1+4n^2i}{8n^2-i}-\frac{3}{4}i$

$z-\frac{3}{4}i=\frac{1-8n^2i}{32n^2-4i}$

Nos piden:

$\left|z-\frac{3}{4}i\right|=\frac{\sqrt{1^2+(8n^2)^2}}{\sqrt{(32n^2)^2+4^2}}$

$\left|z-\frac{3}{4}i\right|=\frac{\sqrt{1^2+(8n^2)^2}}{\sqrt{4^2\left[(8n^2)^2+1\right]}}=\frac{1}{4}$

Clave B

Resolución de problemas

31. Sean los complejos:

$A_1=m+ni\ /\ A_2=p+qi$

De acuerdo al enunciado:

$A_1-A_2=1$ (1)

$\frac{A_1}{A_2}=ri$ (2)

$|A_1-A_2|=\frac{|A_1|}{|A_2|}$ (3)

De (2):

$\frac{m+ni}{p+qi}=ri \Rightarrow m+ni=pri+rqi^2$

$m+ni=-rq+pri$

$m=-rq$ (4)

$n=pr$ (5)

(4) ÷ (5):

$\frac{m}{n}=\frac{-rq}{pr}$

$mp=-nq$ (6)

De (3):

$\sqrt{\frac{m^2+n^2}{p^2+q^2}}=1$

$\Rightarrow m^2+n^2=p^2+q^2$ (7)

De (1):

$m+ni-p-qi=1$

$\Rightarrow (m-p)+(n-q)i=1$

$m-p=1$ (8)

$n-q=0 \Rightarrow n=q$ (9)

(9) en (7):

$m=\pm p$ (10)

De (10):

$m=p \vee m=-p$

$m-p=0$ (no cumple, ver (8)) (11)

$m+p=0$ (sí cumple) (12)

(12) en (8):

$m-p=1$

$\left.\begin{array}{l} -p-p=1 \Rightarrow p=-\frac{1}{2} \\ m=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$ (13)

(13) en (6):

$\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=-nq$

$-\frac{1}{4}=-nq$

$nq=\frac{1}{4}$ (14)

De 9:

$n^2=\frac{1}{4} \Rightarrow n=\pm\frac{1}{4}=q$ (15)

Los complejos serán:

$A_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$; $A_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

$A_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$; $A_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

$A_1=\frac{1}{2}(1+i)$; $A_1=\frac{1}{2}(1-i)$

$A_2=-\frac{1}{2}(1-i)$; $A_2=-\frac{1}{2}(1+i)$

Clave D

32. Si:

$z^2+12=|z|^2-i$

Sea: $z=a+bi$

Reemplazando:

$(a+bi)^2+12=a^2+b^2-i$

$a^2-b^2+2abi+12=a^2+b^2-i$

$(12-b^2)+2abi=b^2-i$

Comparando:

$12-b^2=b^2 \Rightarrow b=\pm\sqrt{6}$

$2ab=-1$ ...(I)

(*) Si: $b=\sqrt{6}$, en (I):

$a=-\frac{1}{2\sqrt{6}}$

Luego: $z_1=-\frac{1}{2\sqrt{6}}+\sqrt{6}\,i$

(*) Si: $b=-\sqrt{6}$, en (I)

$a=\frac{1}{2\sqrt{6}}$

Luego: $z_2=\frac{1}{2\sqrt{6}}-\sqrt{6}\,i$

∴ Existen 2 números complejos.

Clave B

MARATÓN MATEMÁTICA
(página 52) Unidad 2

1.

z	$\bar{z}$	z*	|z|	Arg(z)
3 + 4i	3 – 4i	–3 – 4i	5	53°
4 – 3i	4 + 3i	–4 + 3i	5	323°
1 + 7i	1 – 7i	–1 – 7i	$5\sqrt{2}$	82°
1 – 2i	1 + 2i	–1 + 2i	$\sqrt{5}$	$\frac{593°}{2}$
1 + 3i	1 – 3i	–1 – 3i	$\sqrt{10}$	$\frac{143°}{2}$

2. $35C_x^{34} = 28C_7^{35}$

$5C_x^{34} = 4C_7^{35}$

$\frac{5 \,.\, 34!}{x!\,(34-x)!} = \frac{4 \,.\, 35!}{7!\,28!} = \frac{4 \,.\, 35 \,.\, 34!}{7!\,28!}$

$\frac{1}{x!\,(34-x)!} = \frac{28}{7!\,28!} = \frac{1}{7!\,27!}$

$\Rightarrow x = 7 \;\vee\; x = 27$

Clave E

3. $M = \frac{\sqrt{8+\sqrt{4\times15}} - \sqrt{3}}{\sqrt{15}}$

$M = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{5\,.\,3}} - \sqrt{3}}{\sqrt{15}}$

Por radicales dobles:

$M = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$

$M = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Clave D

4. Usamos Ruffini:

P(x)

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 4 & m & n \\ -2 & & -2 & -4 & 8-2m \\ \hline & 1 & 2 & m-4 & n+8-2m \end{array} \Rightarrow 2m - n = 8 \quad ...(I)$$

$n + 8 - 2m = 0$

Q(x): si x + 2 es raíz de Q(x) $\Rightarrow$ Q(–2) = 0

Evaluando:

$Q(-2) = (-2)^2 - m(-2) + n = 0$

$2m + n = -4 \quad ...(II)$

De (I) y (II): $2m - n = 8$

$2m + n = -4$ (+)

$4m = 4$

$m = 1 \Rightarrow n = -6$

Reemplazando:

$P(x) = (x + 2)(x^2 + 2x - 3)$

x +3

x –1

$P(x) = (x + 2)(x + 3)(x - 1)$

$Q(x) = x^2 - x + (-6) = x^2 - x - 6$

x –3

x +2

$Q(x) = (x - 3)(x + 2)$

$\Rightarrow$ MCM (P; Q) = (x + 2)(x – 3)(x + 3)(x – 1)

Clave E

5. Binomio de Newton:

$T_6 = C_5^8\, x^{8-5} \,.\, \left(\frac{-y}{x}\right)^5 = \frac{-8!}{3!5!} \cdot x^3 \cdot \frac{y^5}{x^5} = -56x^{-2}y^5$

Clave C

6. $\sqrt{36 + 2\sqrt{320}} - \sqrt{21 + 2\sqrt{80}}$

$36 = 16 + 20$, $320 = 16 \times 20$, $21 = 16 + 5$, $80 = 16 \times 5$

$\sqrt{16} + \sqrt{20} - (\sqrt{16} + \sqrt{5})$

$\sqrt{20} - \sqrt{5}$

$2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$

Clave A

7. $\frac{\sqrt{7}+(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{7}+(\sqrt{3}+2)} \cdot \frac{(\sqrt{7}-(\sqrt{3}+2))}{(\sqrt{7}-(\sqrt{3}+2))} = \frac{8-4\sqrt{7}}{7-(\sqrt{3}+2)^2} = \frac{8-4\sqrt{7}}{-4\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{3}}$

Clave A

8. Recordar: para $(a + b)^m$

El $t_{k+1} = C_k^m\, a^{m-k} b^k$

$a = xy^3 \qquad b = \sqrt{y}\,.x$

$T_{6+1} = C_6^{16}(x\,.\,y^3)^{16-6}\,.\,(\sqrt{y}\,.\,x)^6$

$= \frac{16!}{6!\,10!}\,.\,x^{10}y^{30}\,.\,y^2\,.\,x^6$

$= \frac{11\times12\times13\times14\times15\times16}{1\times2\times3\times4\times5\times6} \times x^{16}y^{33}$

$= 11\times\; 13\times14\times4\times x^{16}\,.\,y^{33}$

$\Rightarrow$ m = 44; p = 16; q = 33

$\Rightarrow \frac{m}{44} \times C_{(q-19)}^{p}$

$= \frac{44}{44} \times C_{14}^{16} = 1 \times \frac{16!}{14!\,2!} = 120$

Clave C

9. Recuerda: $(1 + i)^2 = 2i$; $(1 - i)^2 = 2i$

Entonces:

$E = ((1+i)^2)^8 + ((1+i)^2)^8(1+i) - ((1-i)^2)^8$

$E = (2i)^8 + (2i)^8(1 + i) - (-2i)^8$

$E = 2^8 + 2^8(1 + i) - 2^8$

$\therefore E = 2^8\,(1 + i)$

Clave A

10. Dato:

$|1 - z| = 2$

$|1 - (2 + bi)| = 2$

$|-1 - bi| = 2$

$\sqrt{(-1)^2 + (-b)^2} = 2$

$1 + b^2 = 4 \Rightarrow b^2 = 3$

Nos piden:

$|2 + bi| = \sqrt{2^2 + b^2} = \sqrt{4 + 3}$

$\therefore |2 + bi| = \sqrt{7}$

Clave C

Unidad 3

ECUACIONES DE PRIMER GRADO
PLANTEO DE ECUACIONES

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 57) Unidad 3

Comunicación matemática

1. I. (F)

Desarrollando la ecuación:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}x-1\right)-1\right)=1$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}x-1\right)-1=4$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}x-1\right)=5$$

$$\frac{1}{4}x-1=20$$

Ec. equivalente $\Rightarrow \frac{1}{4}x=21$

$x=84$

II. (V)
$x=84$

III. (F)
La única solución es $x=84$

IV. (F)
La ecuación es consistente.

Clave A

2. A) $x=3 \Rightarrow CS=\{3\}$ (F)

B) $10x+0=0 \Rightarrow CS=\{0\}$ (V)

C) $0x+101=0 \Rightarrow 0=-101 \Rightarrow CS=\{\ \}$ (F)

D) $0x+0=0 \Rightarrow x\in\mathbb{R} \Rightarrow CS=\mathbb{R}$ (V)

Razonamiento y demostración

3. $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=8$

$$\frac{3.x}{3.2}-\frac{2.x}{2.3}+\frac{x}{6}=8$$

$$\frac{3x}{6}-\frac{2x}{6}+\frac{x}{6}=8$$

$$\frac{3x-2x+x}{6}=8$$

$$2x=6\,.\,8$$

$$\therefore\ x=\frac{48}{2}=24$$

Clave E

4. $\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{4}=\frac{x-4}{5}$

$$\frac{6x-6+4x-8+3x-9}{12}=\frac{x-4}{5}$$

$$\frac{13x-23}{12}=\frac{x-4}{5}$$

$$65x-115=12x-48$$

$$53x=67$$

$$x=\frac{67}{53}$$

Clave A

5. $\frac{2(x+3)+1}{6}=\frac{(x+1)-2(x-3)}{2}$

$$2x+7=3(-x+7)$$

$$2x+7=-3x+21$$

$$5x=14$$

$$\therefore x=\frac{14}{5}$$

Clave D

6. Resolviendo:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{6}}=\frac{\frac{2x-1}{4}}{\frac{5}{4}}$$

Reduciendo:

$$\frac{2\times 6}{3\times 10}=\frac{2x-1}{5}$$

$$\frac{2}{5}=\frac{2x-1}{5}$$

$$2=2x-1$$

$$x=\frac{3}{2}$$

$$CS=\left\{\frac{3}{2}\right\}$$

Clave B

7. $\frac{a}{b}\left(1-\frac{a}{x}\right)+\frac{b}{a}\left(1-\frac{b}{x}\right)=1$

$$\frac{a}{b}-\frac{a^2}{bx}+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{ax}=1$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1=\frac{a^2}{bx}+\frac{b^2}{ax}$$

$$\frac{a^2+b^2-ab}{ab}=\frac{a^3+b^3}{abx}$$

$$(a^2+b^2-ab)=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{x}$$

$$\therefore x=a+b$$

Clave C

8. $\frac{2}{3}\left(\frac{x+6}{6}\right)-\frac{2}{5}\left(\frac{x+1}{4}\right)=\frac{11-x}{3}$

$$\frac{x+6}{9}-\frac{x+1}{10}=\frac{11-x}{3}$$

Reduciendo:

$$x+51=330-30x$$

$$31x=279 \Rightarrow x=9$$

Clave A

9. $1-\frac{x+3}{9}+x=\frac{9x+1}{9}$

$$\frac{9-x-3+9x}{9}=\frac{9x+1}{9}$$

$$8x+6=9x+1 \Rightarrow x=5$$

Clave C

Resolución de problemas

10.

	Televisor	Libros
Costo:	C	C – 500

$$\frac{C-500}{4}+60=\frac{C}{5}$$

$$\frac{C-500+240}{4}=\frac{C}{5}$$

$$5C-260(5)=4C \Rightarrow C=1300$$

$\therefore$ El precio del televisor es S/.1300.

Clave C

11. $[(a-1)x+2a-1]x+3ax=2a-3$

$(a-1)x^2+(5a-1)x=2a-3$

Como la ecuación es de primer grado.

$\Rightarrow a-1=0 \Rightarrow a=1$

Clave E

12.

	Parte hecha en 1 hora	Número de horas trabajando juntas	Parte completada del trabajo
Yiuliana	$\frac{1}{3}$	x	$\frac{x}{3}$
Brenda	$\frac{1}{5}$	x	$\frac{x}{5}$
Bianca	$\frac{1}{6}$	x	$\frac{x}{6}$

$\sum$ Partes hechas por cada persona = Parte completada del trabajo

$$10x+6x+5x=3\,.\,5\,.\,2$$

$$21x=3\,.\,5\,.\,2$$

$$\therefore\ x=\frac{10}{7}=1\frac{3}{7}\ h$$

Clave A

Nivel 2 (página 57) Unidad 3

Comunicación matemática

13. FFV

Clave C

14. VFVF

Clave A

Razonamiento y demostración

15. $\frac{6x}{6}+\frac{3}{2}=\frac{9x}{3}-\frac{5}{5}$

$$x+\frac{3}{2}=3x-1$$

$$\frac{3}{2}+1=3x-x$$

$$\frac{3+2}{2}=2x \Rightarrow \frac{5}{4}=x$$

Clave C

16. $5-\frac{x}{3}=\frac{x}{6}+6$

$$5-6=\frac{x}{6}+\frac{x}{3}$$

$$-1=\frac{x+2x}{6}=\frac{3x}{6}$$

$$-1=\frac{x}{2} \qquad \therefore x=-2$$

Clave C

17. $\frac{4}{3}(x+2)=\frac{8}{3}+4(x-2)$

$$4(x+2)=8+12(x-2)$$
$$4x+8=8+12x-24$$
$$24=8x$$
$$\therefore x=3$$

Clave B

18. $\dfrac{(x-2)}{3}-\dfrac{(x-2)}{5}=6$

$$5(x-2)-3(x-2)=90$$
$$5x-10-3x+6=90$$
$$2x-4=90$$
$$2x=94$$
$$\therefore x=47$$

Clave C

19. $3(2x+8=\frac{x}{3}+9)$

$$6x+24=x+27$$
$$5x=3$$
$$\therefore x=\frac{3}{5}$$

Clave E

20. $\dfrac{x^3+3x}{3x^2+1}=\dfrac{91}{37}$

Aplicamos proporciones:

$$\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x^2+3x-1}=\frac{91+37}{91-37}$$
$$\frac{(x+1)^3}{(x-1)^3}=\frac{128}{54}$$
$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3=\frac{64}{27}=\left(\frac{4}{3}\right)^3$$
$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{4}{3}$$

Aplicamos proporciones:

$$\frac{2x}{2}=\frac{7}{1}\Rightarrow x=7$$

Clave A

21. $x-\sqrt{x^2-21}=7$

$$x-7=\sqrt{x^2-21}$$

Elevamos al cuadrado:

$$(x-7)^2=(\sqrt{x^2-21})^2$$
$$x^2-14x+49=x^2-21$$
$$70=14x$$
$$x=5$$

Reemplazando en la ecuación:

$$5-\sqrt{5^2-21}=7$$
$$5-2=7\Rightarrow 3=7$$

(absurdo)

$\therefore$ La ecuación es incompatible.

Clave E

Resolución de problemas

22. $\underset{\text{Medida a los t años y r meses}}{} = \underbrace{2,5(12)}_{\text{primer año}} + \underbrace{40}_{\text{medida de nacido}} + \underbrace{0,6\,(12t+r)}_{\text{meses siguientes}}$

$$\Rightarrow 70+7,2t+0,6r$$

Clave E

23.

	Parte hecha en 1 semana	Número de semanas trabajando juntos	Parte completada del trabajo
Pablo	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
Ramón	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$
Gabino	$\frac{1}{t}$	1	$\frac{1}{t}$

$$\sum \text{Partes hechas por cada persona} = \text{Trabajo conjunto}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{t}=1$$
$$\frac{1}{t}=\frac{7}{15}$$
$$t=2\frac{1}{7}\text{ semanas}$$

Clave D

Nivel 3 (página 58) Unidad 3

Comunicación matemática

24. Clave B

25. I. (F)

$$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{x^2+x-6}$$
$$\frac{x+3+x-2}{(x-2)(x+3)}=\frac{3}{(x-2)(x+3)}$$
$$2x+1=3$$
$$x=1$$

Única solución $\Rightarrow$ compatible determinada

II (V)

$$\frac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$
$$(x+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)=(x-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)$$
$$x\sqrt{3}-x+3-\sqrt{3}=x\sqrt{3}+x-3-\sqrt{3}$$
$$2x=6$$
$$x=3$$

Única solución $\Rightarrow$ compatible determinada

III. (V)

$$\frac{5x-2}{3}-\frac{x-1}{2}=\frac{7x-1}{6}$$
$$10x-4-3x+3=7x-1$$
$$7x-1=7x-1$$
$$0x=0$$

$CS=\mathbb{R}$

(Verifica para todo valor real de x)

IV. (F)

$$\frac{x+3}{x-2}+\frac{x+6}{x-5}=\frac{2x^2-4x+3}{x^2-7x+10}$$
$$\frac{(x+3)(x-5)+(x+6)(x-2)}{(x-2)(x-5)}=\frac{2x^2-4x+3}{(x-2)(x-5)}$$
$$x^2-2x-15+x^2+4x-12=2x^2-4x+3$$
$$2x^2+2x-27=2x^2-4x+3$$
$$6x=30\Rightarrow x=5$$

Para x = 5, en la ecuación:

$$\frac{8}{3}+\frac{11}{0}=\frac{33}{0}$$

$\therefore$ La ecuación es incompatible.

26. $(x+2)+(x+4)+(x+6)+(x+8)+\ldots$

$$+(x+2n)=n^2+3n$$
$$nx+2(1+2+\ldots+n)=n^2+3n$$
$$nx+n(n+1)=n^2+3n$$
$$nx+n^2+n=n^2+3n$$
$$nx=2n$$
$$x=2$$

$CS=\{2\}$

Clave D

27. $2+\dfrac{3-x}{2}+\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{x+1}{4}$

$$12.\left(2+\frac{3-x}{2}+\frac{x-1}{3}\right)=12.\left(\frac{x+1}{4}\right)$$
$$24+6(3-x)+4(x-1)=3(x+1)$$
$$24+18-6x+4x-4=3x+3$$
$$-2x+38=3x+3$$
$$38-3=3x+2x$$
$$35=5x\Rightarrow 7=x$$

Clave B

28. $\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{x+70}{80}\right)-\dfrac{x+30}{40}=\dfrac{-6+2x}{5}-\dfrac{x+7}{5}$

$$\frac{x+70}{5.40}-\frac{5(x+30)}{5.40}=\frac{-6+2x-x-7}{5}$$
$$\frac{x+70-5x-150}{200}=\frac{x-13}{5}$$
$$-4x-80=40x-520$$
$$520-80=44x$$
$$440=44x\Rightarrow x=10$$

Clave E

29. $\dfrac{x-ab}{a+b}+\dfrac{x-ac}{a+c}+\dfrac{x-bc}{b+c}=a+b+c$

Trasponiendo términos:

$$\frac{x-ab}{a+b}-c+\frac{x-ac}{a+c}-b+\frac{x-bc}{b+c}-a=0$$
$$\frac{x-ab-ac-bc}{a+b}+\frac{x-ac-ab-bc}{a+c}+\frac{x-bc-ab-ac}{b+c}=0$$
$$\underbrace{(x-ab-bc-ac)}_{=0}\underbrace{\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)}_{\neq 0}=0$$
$$x-ab-bc-ac=0$$
$$x=ab+bc+ac$$

Clave C

30. $\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=3$

Dando forma:

$$\frac{x-a}{b+c}-1+\frac{x-b}{c+a}-1+\frac{x-c}{a+b}-1=0$$

$$\frac{x-a-b-c}{b+c}+\frac{x-b-c-a}{c+a}+\frac{x-c-a-b}{a+b}=0$$

$$\underbrace{x-a-b-c}_{=0}\underbrace{\left[\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right]}_{\neq 0}=0$$

$x-a-b-c=0 \Rightarrow x=a+b+c$

Clave B

31. Agrupando términos del enunciado:

$$4=\frac{(x+1)^2-4}{x-2}-x-\frac{5}{x-2}\ ;\ x\neq 2$$

$$\Rightarrow 4=\frac{x^2+2x+1-4-5}{x-2}-x$$

$$4+x=\frac{x^2+2x-8}{x-2}$$

Luego:

$$4x-8+x^2-2x=x^2+2x-8$$
$$0x=0$$

Entonces: $x \in \mathbb{R}$

Como: $x \neq 2$

$\therefore x \in \mathbb{R}-\{2\}$

Clave D

32. $x-5+\frac{4}{x-6}=7-x+\frac{4}{x-6}$

$\Rightarrow x-6\neq 0 \Rightarrow x\neq 6$

Luego, de la ecuación inicial:

$$x-5=7-x$$
$$2x=12$$
$$\Rightarrow x=6$$

Como : $x\neq 6$

Por lo tanto, la ecuación es incompatible.

Clave E

Resolución de problemas

33. Total de asistentes:

$$12\,.\underbrace{B}_{\text{n.º de bancas}}+11=15\underbrace{(B-1)}_{\text{n.º de bancas llenas}}+11$$

$$12B+11=15B-15+11$$
$$15=3B$$
$$5=B$$

$\therefore$ La iglesia tiene:

$12\,.\,(5)+11=71$ asistentes

Clave C

34.

	Parte hecha en 1 hora	Número de horas trabajando juntos	Parte completada del trabajo
Gilberto	$\frac{1}{8}$	4	$\frac{1}{2}$
Gálvez	$\frac{1}{2t+t}$	4	$\frac{4}{3t}$
Mariano	$\frac{1}{t}$	4	$\frac{4}{t}$

Suma de partes de cada persona = Trabajo conjunto

$$\frac{1}{2}+\frac{4}{3t}+\frac{4}{t}=1$$

$$\frac{4}{t}\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{t}\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$t=\frac{32}{3}$$

$$t=10\frac{2}{3}\text{ h}$$

Clave E

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 59) Unidad 3

1. Como A y B son matrices iguales tenemos:

- $a - 4b = 6 \Rightarrow a = 6 + 4b$
- $a = -6$

Reemplazando:

$-6 = 6 + 4b$

$4b = -12 \Rightarrow b = -3$

Luego, piden:

$a + b = -6 - 3 = -9$

Clave D

2. $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \text{Traz}[(A+B)(A-B)] = 0$

Clave A

3. $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow D^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$\therefore 2D^t = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 14 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$

Clave A

4. $A = \begin{pmatrix} 7 & c-1 & b+7 \\ a-3 & 6 & a+4 \\ b+2 & c-1 & 7 \end{pmatrix}$

Si A es una matriz triangular superior, entonces:

$a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$

$c - 1 = 0 \Rightarrow c = 1$

$b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2$

$\therefore a + b + c = 2$

Clave D

5. $A = \begin{pmatrix} (1-6) & 0 \\ 0 & (1-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

$\therefore A^t = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

Clave C

6. $A - B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

$\therefore A - B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ -7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

Clave A

7. $A = (3\ \ 2\ \ 1)_{1\times 3}$; $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times 1}$

$\Rightarrow A \times B = 3\,.\,4 + 2(-1) + 1\,.\,3$

$\therefore A \times B = 12 - 2 + 3 = 13$

Clave E

8. $3B + 4A = 3\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$\therefore 3B + 4A = \begin{bmatrix} 15-8 & 9+20 \\ -6+12 & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 29 \\ & 6-1 \end{bmatrix}$

Clave D

9. Restando a la 2.ª columna la 3.ª columna:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & \sec^2 x - \tan^2 x & \tan^2 x & 3 \\ 4 & 4\cos^2 + 4\text{sen}^2 x & -4\text{sen}^2 x & 1 \\ 5 & 5\text{sen}^2 x + 5\cos^2 x & -5\cos^2 x & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \tan^2 x & 3 \\ 4 & 4 & -4\text{sen}^2 x & 1 \\ 5 & 5 & -5\cos^2 x & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

iguales

$\therefore |B| = 0$

Clave E

10. $A = \begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 71 & 91 \\ 4 & 72 & 92 \\ 5 & 73 & 93 \end{vmatrix}$

Restando a la 3.ª fila la 2.ª fila y a la 2.ª fila la 1.ª fila, obtenemos:

$A = \begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 71 & 91 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\therefore A = 0 + 0 = 0$

Clave A

11. $B = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 & 4 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

Restamos a la 1.ª columna la 4.ª columna:

$B = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 & 4 \\ 0 & 6 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

Restamos a la 1.ª columna la 3.ª columna:

$B = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 2(7\,.\,4 - 4\,.\,4)$

$\therefore B = 2(28 - 16) = 2(12) = 24$

Clave C

12. $F = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Restando $C_5 - C_4$:

$$F = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 6 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Por menores complementarios:

$$F = 2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 7 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Por menores complementarios:

$$F = -2\begin{vmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$F = (-2)(5)\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$F = -10[7 - 6] = -10$

Clave C

13. $E = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \\ 5 & -3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

Por operaciones elementales:

$C'_2 = 2C_2 - C_1 \wedge C'_3 = C_3 - 2C'_1 \wedge C'_4 = 3C_1 - C_4$

$$E = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & -7 & 9 \\ 5 & -11 & -15 & 14 \end{vmatrix}$$

$E = 2\begin{vmatrix} 9 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & 9 \\ -11 & -15 & 14 \end{vmatrix}$

Evaluando:

$E = 2[-882 - 99 + 60 - 308 + 1215 + 14]$

$E = 2\,.\,0$

$\therefore E = 0$

Clave A

14. $\begin{vmatrix} 1 & (x+2) & (x+2)^2 \\ 1 & 2x & 4x^2 \\ 1 & x^2 & x^4 \end{vmatrix} = 0$

Dando forma:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (x+2) & (2x) & (x^2) \\ (x+2)^2 & (2x)^2 & (x^2)^2 \end{vmatrix} = 0$

Por determinante de Vandermonde se tiene:

$(x + 2 - 2x)(2x - x^2)(x^2 - x - 2) = 0$

$x(2 - x)(2 - x)(x - 2)(x + 1) = 0$

$(x - 2)^3 x\,.\,(x + 1) = 0$

Luego:

$x = 2 \ \vee\ x = 0 \ \vee\ x = -1$

Clave B

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 61) Unidad 3

Comunicación matemática

1. Del enunciado, el elemento:

$$c_{34} = (a_{31}\ a_{32})\begin{bmatrix} b_{14} \\ b_{24} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow c_{34} = a_{31}b_{14} + a_{32}b_{24}$

$\therefore\ c_{34} = (4)(14) + (5)(16) = 136$

Clave A

2. Sea la matriz A:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Calculando cada término:

$a_{11} = 1;\quad a_{12} = 0;\quad a_{13} = 0$

$a_{21} = 3;\quad a_{22} = 1;\quad a_{23} = 0$

Luego, la matriz será:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ La suma de sus elementos es:

$3 + 1 + 1 = 5$

Razonamiento y demostración

3. Se pide Traz(X), si:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Sea:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ 5a+4c & 5b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a + 2c = 0 \\ 5a + 4c = 4 \end{cases} \Rightarrow a = -4 \wedge c = 6$$

$$\begin{cases} 3b + 2d = -2 \\ 5b + 4d = 10 \end{cases} \Rightarrow b = -14 \wedge d = 20$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -4 & -14 \\ 6 & 20 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Traz(X) = 16

Clave A

4. $Q(x) = x^2 - 3x - 1$

Entonces:

$Q(B) = B^2 - 3B - I$

$$Q(B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q(B) = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 5 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q(B) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$\therefore \Sigma$ elementos de Q(B) es: 10

Clave E

5. Del enunciado:

$2X = 3A - 6B - 6C - 3X + A$

$5X = 4A - 6B - 6C$

$\Rightarrow X = \frac{1}{5}(4A - 6B - 6C)$

Reemplazando: A, B y C

$$X = \frac{1}{5}\left(4\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\right)$$

Resolviendo:

$$X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 10 & -30 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Clave D

6.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$6y + 8z + 15x - (12y + 12x + 5z) = 0$

$3x - 6y + 3z = 0$

$\Rightarrow x + z = 2y$

$$\therefore\ \frac{y}{x+z} = \frac{y}{2y} = \frac{1}{2}$$

Clave A

7. $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\ Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Por dato: $P(A;B) = 2A - B + 3$

$$\Rightarrow P(X;Y) = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(X;Y) = \begin{pmatrix} 2-1+3 & 4+0+0 \\ -2+1+0 & 0-2+3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore P(X;Y) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Clave C

8. Sea: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Por dato:

$$A\,.\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\begin{pmatrix} 2b-2a & a+b \\ 2d-2c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a + b = 5\ \wedge\ c + d = 0$

Piden:

$a + b + c + d = (5) + (0) = 5$

$\therefore\ a + b + c + d = 5$

Clave A

Resolución de problemas

9. $T = \dfrac{|A^3|2B||}{||A|B^t|}$

$$T = \frac{|A^3 \cdot 2^2|B||}{|2B^t|}$$

$$T = \frac{|A^3 . 4 . 3|}{2^2|B^t|} = \frac{|12A^3|}{4|B|}$$

$$\Rightarrow T = \frac{(12)^3|A^3|}{4 \cdot 3} = 12^2|A|^3$$

$\therefore T = 144 . 8 = 1152$

Clave C

Nivel 2 (página 61) Unidad 3

Comunicación matemática

10.

$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix} = 0$$

Haciendo $f_3 - f_1$; $f_2 - f_1$:

$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2 & -2x & x+3 \\ 0 & 0 & 2x \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 2x[(2x-1)(-2x) - (3x)(2)] = 0$

$-4x^2(2x + 2) = 0$

$x^2(x + 1) = 0$

$\Rightarrow x = 0\ \ \vee\ \ x = -1$

$\Rightarrow S = \{0; -1\}$

Por lo tanto:

I. (F)

II. (F)

III. (V), cero es una raíz de multiplicidad 2.

IV. (V)

Clave A

11.

Razonamiento y demostración

12. Hallando:

$P(A) = A^2 + 3A - 4I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9+20 & 12+12 \\ 15+15 & 20+9 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 29 & 24 \\ 30 & 29 \end{pmatrix}$$

$$3A = 3\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$$

$$4I = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P(A) = \begin{pmatrix} 29 & 24 \\ 30 & 29 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 15 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ P(A) = \begin{pmatrix} 34 & 36 \\ 45 & 34 \end{pmatrix}$$

Piden: 34 + 34 = 68

13.

$$\begin{vmatrix} i & x & x & x \\ -x & i & x & x \\ -x & -x & i & x \\ -x & -x & -x & i \end{vmatrix} = -4$$

Sumando $c_1 + c_4$:

$$\begin{vmatrix} x+i & x & x & x \\ 0 & i & x & x \\ 0 & -x & i & x \\ i-x & -x & -x & i \end{vmatrix}$$

Por menores complementarios:

$$(x+i)\begin{vmatrix} i & x & x \\ -x & i & x \\ -x & -x & i \end{vmatrix} - (i-x)\begin{vmatrix} x & x & x \\ i & x & x \\ -x & i & x \end{vmatrix} = -4$$

Reduciendo:

$x^4 - 6x^2 + 1 = -4 \Rightarrow x^4 - 6x^2 + 5 = 0$

$$\begin{matrix} x^2 & & -5 \\ x^2 & & -1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow \quad x^2 = 5 \quad \vee \quad x^2 = 1$

$\therefore \quad x_1 = \sqrt{5}\,;\ x_2 = -\sqrt{5}\,;\ x_3 = 1;\ x_4 = -1$

$\therefore$ La menor raíz es: $-\sqrt{5}$

Clave C

14. Como A = B, entonces:

$y = -2 \wedge x = 2$

Piden:

$$3A + 2C = 3\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -4 & -8 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore 3A + 2C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 20 \\ 7 & 24 & 0 \end{pmatrix}$$

Clave A

15. Por dato:

$$\begin{pmatrix} 2x - z & w - y \\ z - x & w + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$2x - z = 6 \quad ...(1)$

$z - x = -1 \quad ...(2)$

$w - y = 5 \quad ...(3)$

$w + y = 7 \quad ...(4)$

De (1) y (2): $x = 5 \wedge z = 4$

De (3) y (4): $w = 6 \wedge y = 1$

Piden:

$(x - y)(z - w) = (5 - 1)(4 - 6)$

$\therefore (x - y)(z - w) = -8$

Clave A

16. Restamos la 1.ª fila a todas las demás:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & 2 & & \\ \vdots & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & n-2 \end{vmatrix}$$

Por menores complementarios:

$$A = -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 1 & \cdots & & & n-2 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow A = -2(1 . 1 . 2 . 3 . 4...(n-2))$

$\therefore A = -2(n-2)!$

Clave A

17.

$$|A| = \sqrt{2}\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{7} & \sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{vmatrix}$$

Realizamos las siguientes operaciones:

$c_1 - c_3$ y $c_2 - 2c_3$

$$|A| = 3\sqrt{10}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ \sqrt{3}-\sqrt{2} & \sqrt{7}-2\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{vmatrix}$$

$$|A| = 3\sqrt{10}\left[-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right]\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{vmatrix}$$

$|A| = 3\sqrt{10}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)(-1)(5-2)$

$|A| = -9\sqrt{10}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

$\therefore |A| = 9\sqrt{10}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

Clave E

Resolución de problemas

18. Del enunciado:

$f(x) = |A - xI|;\ g(x) = |A^{-1} - xI| \neq 0$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = |A - x^{-1}I|$

Hallando una expresión equivalente a $g(x)$:

$g(x) = |A^{-1}xx^{-1} - xA^{-1}A|$

$g(x) = |-A^{-1}x(A - x^{-1}I)|$

$g(x) = |-A^{-1}x| . |A - x^{-1}I|$

$g(x) = |-A^{-1}x| . f\left(\frac{1}{x}\right) \quad ...(1)$

Además:

$g(x) = h(x) . f\left(\frac{1}{x}\right) \quad ...(2)$

De (1) y (2):

$\Rightarrow h(x) = |-A^{-1}x| = |-xA^{-1}| = (-x)^n|A^{-1}|$

$\therefore h(x) = (-1)^n x^n |A|^{-1} = \dfrac{x^n(-1)^n}{|A|}$

Clave E

Nivel 3 (página 62) Unidad 3

Comunicación matemática

19. $B + B^t = b_{ij} + b_{ji} = \begin{cases} 2;\ i = j \\ 0;\ i \neq j \end{cases}$

Entonces:

$B + B^t$ es una matriz diagonal.

$\Rightarrow B + B^t = \text{diagonal}\ (2; 2; 2; ...; 2)$

$B + B^t = 2I$

Luego:

$AB + AB^t = 6I$

$A(B + B^t) = 6I$

$\Rightarrow |A| . |B + B^t| = |6I|$

$|A| . |2I| = |6I|$

$|A| . 2^n|I| = 6^n|I| \Rightarrow |A| = \dfrac{6^n}{2^n} = \dfrac{2^n . 3^n}{2^n}$

$\therefore \quad |A| = 3^n$

Clave D

20.

Razonamiento y demostración

21. Si A es una matriz simétrica: $A = A^t$

Luego:

$$\begin{pmatrix} x & 5 & 3z + x \\ x + 2y & y & 20 \\ 11 & 2y + 3z & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x + 2y & 11 \\ 5 & y & 2y + 3z \\ 3z + x & 20 & z \end{pmatrix}$$

Entonces:

$x + 2y = 5 \quad ...(1)$

$2y + 3z = 20 \quad ...(2)$

$3z + x = 11 \quad ...(3)$

Sumando (1), (2) y (3):

$2x + 4y + 6z = 36$

$x + 2y + 3z = 18$

$5 + 3z = 18$

$\Rightarrow z = \dfrac{13}{3}$

Reemplazando el valor de z en (2) y (3):

$\Rightarrow y = \dfrac{7}{2} \quad \wedge \quad x = -2$

Piden:

$\text{traz}(A) = x + y + z$

$\therefore \text{traz}(A) = -2 + \dfrac{7}{2} + \dfrac{13}{3} = \dfrac{35}{6}$

Clave C

22. Restando columnas:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1^2 & 3^2 - 1^2 & 5^2 - 3^2 & 7^2 - 5^2 \\ 9^2 & 11^2 - 9^2 & 13^2 - 11^2 & 15^2 - 13^2 \\ 17^2 & 19^2 - 17^2 & 21^2 - 19^2 & 23^2 - 21^2 \\ 25^2 & 27^2 - 25^2 & 29^2 - 27^2 & 31^2 - 21^2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1^2 & 4 . 2 & 8 . 2 & 12 . 2 \\ 9^2 & 20 . 2 & 24 . 2 & 28 . 2 \\ 17^2 & 36 . 2 & 40 . 2 & 44 . 2 \\ 25^2 & 52 . 2 & 56 . 2 & 60 . 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2 . 2 . 2\begin{vmatrix} 1^2 & 4 & 8 & 12 \\ 9^2 & 20 & 24 & 28 \\ 17^2 & 36 & 40 & 44 \\ 25^2 & 52 & 56 & 60 \end{vmatrix}$$

Restando columnas:

$$|A| = 8\begin{vmatrix} 1^2 & 4 & 8 & 4 \\ 9^2 & 4 & 24 & 4 \\ 17^2 & 4 & 40 & 4 \\ 25^2 & 4 & 56 & 4 \end{vmatrix}$$

Hay 2 columnas iguales; por propiedad:

$\therefore \quad |A| = 8 . 0 = 0$

Clave A

23.

$$|E| = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 8 & 5 \end{vmatrix}$$

Sumando f_2; f_3 y f_4 a la f_1 y factorizando:

$$|E| = 26\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 8 & 5 \end{vmatrix}$$

Luego: $f_4 - 5f_1$; $f_3 - 5f_1$; $f_2 - 5f_1$

$$|E| = 26\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Haciendo las siguientes operaciones elementales: $f_4 - f_1$; $f_3 - 2f_1$ y $f_2 - 3f_1$

$$|E| = 26\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|E| = 26\left(1\begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

Finalmente: $c_1 + c_3$

$$|E| = 26\begin{vmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 26\left(-4\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

$\therefore$ $|E| = 26\,(-4(4)) = -416$

Clave D

24.

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ a & a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix}$$

Sumamos a f_1 todas las demás filas, los elementos de f_1 serán $na + b$, factorizando:

$$|A| = (na+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ a & a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix}$$

Haciendo la siguiente operación elemental:
$f_i - af_1$, $\forall\, i \in \{2; 3; ...; n\}$

$$|A| = (na+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow |A| = (na+b)\,.\,1\,.\,b^{n-1}$

$\therefore |A| = nab^{n-1} + b^n$

Clave C

25.

$$A = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Hacemos la siguiente operación elemental:
$c_1 - c_2 + c_3 - c_4$

$$|A| = \begin{vmatrix} (a-1)^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ 0 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ 0 & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (a-1)^3\begin{vmatrix} a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ 2a+1 & a+2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Haciendo las siguientes operaciones elementales:
$f_3 - f_2$ y $f_1 - f_2$

$$|A| = (a-1)^3\begin{vmatrix} a^2-1 & a-1 & 0 \\ 2a+1 & a+2 & 1 \\ 2-2a & 1-a & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (a-1)^3\left(-1\begin{vmatrix} a^2-1 & a-1 \\ 2(1-a) & 1-a \end{vmatrix}\right)$$

$|A| = (a-1)^3((a^2-1)(a-1) - 2(a-1)^2)$
$|A| = (a-1)^3((a-1)^2(a+1) - 2(a-1)^2)$
$\Rightarrow |A| = (a-1)^3(a-1)^2((a+1) - 2)$
$\therefore |A| = (a-1)^6$

Clave E

26.

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Sumando a la fila 1 el resto de filas:

$$|N| = \begin{vmatrix} 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Factorizando 15 de la 1.ª fila y haciendo luego las siguientes operaciones:

$f_5 - 2f_1$; $f_4 - 3f_1$; $f_3 - 4f_1$ y $f_2 - 5f_1$:

$$|N| = 15\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |N| = 15\left(1\begin{vmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

Sumando a la 1.ª columna la 4.ª columna:

$$|N| = 15\begin{vmatrix} -5 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|N| = 15(-5)\begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Restando a la 3.ª fila la 2.ª fila:

$$|N| = -75\begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -75\left(-5\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

$\therefore |N| = 75\,.\,5(3 - (-2)) = 75\,.\,5\,.\,5 = 3\,.\,(5^4)$

Clave A

27. $A = (a_{ij})_{n \times n}$ y $|A| \neq 0$

$$N = \text{Det}\left(A^{-1}\text{Det}\left(\frac{2A^t}{|A|}\right)\right)$$

Por propiedad:

Si $A_{n \times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Det}(\lambda A) = \lambda^n\text{Det}(A)$

$$N = \left[\text{Det}\left(\frac{2A^t}{|A|}\right)\right]^n . \text{Det}(A^{-1})$$

$$N = \left[\left(\frac{2}{|A|}\right)^n\text{Det}(A^t)\right]^n \text{Det}(A^{-1})$$

$$\Rightarrow N = \frac{2^{n^2}}{|A|^{n^2}}|A|^n\,.\,\frac{1}{|A|}$$

$\therefore N = 2^{n^2}|A|^{-n^2+n-1}$

Clave E

28. Por dato: A, B y C son matrices cuadradas de orden 4.

Además:

$|A^2B^3C| = 1$ ...(1)

$|2A| = 32$ ...(2)

$|B^3C^2| = \frac{27}{16}$ ...(3)

De (2):

$2^4|A| = 32 \Rightarrow |A| = 2$

De (1):

$|A|^2|B|^3|C| = 1$

$\Rightarrow |B|^3|C| = \frac{1}{4}$ ...(4)

Dividiendo (3) entre (4):

$$\frac{|B|^3|C|^2}{|B|^3|C|} = \frac{\frac{27}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{27}{4}$$

$\Rightarrow |C| = \frac{27}{4}$ ...(5)

Reemplazando (5) en (4):

$|B|^3\frac{27}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow |B| = \frac{1}{3}$

Piden:

$T = 2(2) + 3\left(\frac{1}{3}\right) + 4\left(\frac{27}{4}\right)$

$\therefore T = 32$

Clave D

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 66) Unidad 3

Comunicación matemática

1. I. Correcta (C)

$$\begin{cases} 3a - 2b = -6 \\ -7a + 2b = -10 \end{cases} \quad \frac{3}{-7} \neq \frac{-2}{2} \left(\begin{array}{c}\text{Sistema} \\ \text{compatible} \\ \text{determinado}\end{array}\right)$$

Sistema compatible determinado

II. Incorrecta (I)

$$\begin{cases} 5x - 7y = -29 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \quad \frac{5}{2} \neq \frac{-7}{3}$$

III. Incorrecta (I)

$$\begin{cases} 3x - y = 12 \\ 12x - 7y = 39 \end{cases} \quad \frac{3}{12} \neq \frac{1}{7}$$

Clave C

2.

Clave E

Razonamiento y demostración

3. $x + y + z = 10$ ...(1)
$2x + y + z = 12$ ...(2)
$x - y + 2z = 9$ ...(3)

Restando (2) y (1):
$x = 2$

Sumando (1) y (3):
$2x + 3z = 19$
$2(2) + 3z = 19$
$4 + 3z = 19 \Rightarrow z = 5$

De (1):
$2 + y + 5 = 10 \Rightarrow y = 3$
$\therefore\ xyz = 30$

Clave A

4. Si el sistema siguiente es compatible determinado:

$$\begin{cases} 5mx + (m + 2)y = 27 \\ mx + (3 - m)y = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{5m}{m} \neq \frac{m+2}{3-m}$$

$15m - 5m^2 \neq m^2 + 2m$
$0 \neq 6m^2 - 13m$
$0 \neq m(6m - 13)$

$\therefore m \in \mathbb{R} - \left\{0; \frac{13}{6}\right\}$

Clave A

5. Reemplazando $x = 2$; $y = 3$ en el sistema:

$$\begin{cases} ax - y = 1 \\ bx - 2y = 4 \end{cases}$$

Se tiene:
$a(2) - (3) = 1$
$2a = 4$
$\Rightarrow a = 2$

$b(2) - 2(3) = 4$
$2b = 10$
$\Rightarrow b = 5 \quad \therefore a + b = 7$

Clave E

6. Del sistema:
$x + y = 2$ ...(1)
$y + z = 3$ ...(2)
$x + z = 5$ ...(3)

Sumando (1), (2) y (3):
$2x + 2y + 2z = 10$
$\Rightarrow x + \underbrace{y + z}_{3} = 5$

$\therefore x = 2$

Clave D

7. Del sistema:

$$\begin{cases} xy = 6 & ...(1) \\ yz = 12 & ...(2) \\ xz = 8 & ...(3) \end{cases}$$

Multiplicando (1), (2) y (3), tenemos:
$x^2y^2z^2 = 6 \,.\, 12 \,.\, 8$
$(xyz)^2 = 576 \Rightarrow xyz = 24;\ (x, y, z > 0)$
$\therefore 0{,}5xyz = 12$

Clave C

8. Para que el siguiente sistema tenga infinitas soluciones:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ (m - 1)x + (n - 2)y = 4 \end{cases}$$

Se debe cumplir:
$$\frac{3}{m-1} = \frac{5}{n-2} = \frac{1}{4}$$

Luego:
$\frac{5}{n-2} = \frac{1}{4} \Rightarrow n = 22$

$\frac{3}{m-1} = \frac{1}{4} \Rightarrow m = 13$

Clave B

Resolución de problemas

9. Sea:
P: la edad del hombre.
M: la edad de la esposa.
H: la suma de las edades de los hijos.
x: la cantidad de hijos.

Del enunciado:
$P + M = 6H$ ...(1)
$P + M - 2(2) = 10(H - 2x)$ ...(2)
$P + M + 2(6) = 3(H + 6x)$ ...(3)

Reemplazando (1) en (2) y (3); y desarrollando tenemos:
$5x - H = 1$ ...(4)
$6x - H = 4$ ...(5)

De (4) y (5):
$x = 3 \wedge H = 14$
Por lo tanto, tienen 3 hijos.

Clave C

10. Del problema se tiene:

$\frac{5x + 4y}{xy} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{5}{y} + \frac{4}{x} = \frac{1}{6}$ ...(1)

$\frac{3x + 2z}{xz} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{3}{z} + \frac{2}{x} = \frac{1}{8}$ ...(2)

$\frac{3y + 5z}{yz} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{3}{z} + \frac{5}{y} = \frac{1}{6}$ ...(3)

$(3) - (2)$: $\frac{5}{y} - \frac{2}{x} = \frac{1}{24}$ ...(4)

De (1): $\frac{5}{y} + \frac{4}{x} = \frac{4}{24}$ ...(5)

$(5) - (4)$: $\frac{6}{x} = \frac{1}{8} \Rightarrow x = 48$

Luego: $y = 60$; $z = 36 \Rightarrow E = \frac{60}{48 - 36} = 5$

Clave A

Nivel 2 (página 66) Unidad 3

Comunicación matemática

11.

Clave D

12. Memoria:

- Matrices: 7
- Sistema ecuaciones lineales: 2
- Expresiones diferentes: $Q(x)$; $P(x)$; $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- El sistema lineal con tres incógnitas, extremo superior derecho.
- El valor del determinante $\begin{vmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, no hay.

Razonamiento y demostración

13. Para que el siguiente sistema tenga infinitas soluciones:

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - 3my = 2m + 3 \end{cases}$$

Se debe cumplir:
$$\frac{1}{m} = \frac{m}{-3m} = \frac{1}{2m+3}$$

Luego:
$\frac{1}{m} = \frac{m}{-3m} \Rightarrow -3m = m^2;\ m \neq 0$ ...(1)

$m^2 + 3m = 0$
$m(m + 3) = 0$
$\Rightarrow m = 0 \ \vee\ m = -3$ ...(2)

$\frac{1}{m} = \frac{1}{2m+3}$

$2m + 3 = m$
$m = -3$ ...(3)

Por lo tanto, el valor de m que satisface (1), (2) y (3) es:
$m = -3$

Clave C

14. Si el sistema siguiente es compatible indeterminado:

$$\begin{cases}(a-3)x+(b-2)y=8\\(a+1)x+(b+4)y=24\end{cases}$$

Entonces:

$$\frac{a-3}{a+1}=\frac{b-2}{b+4}=\frac{8}{24}$$

Luego:

$$\frac{a-3}{a+1}=\frac{1}{3}\Rightarrow 3a-9=a+1$$
$$2a=10$$
$$\Rightarrow a=5$$

$$\frac{b-2}{b+4}=\frac{1}{3}\Rightarrow 3b-6=b+4$$
$$2b=10$$
$$\Rightarrow b=5$$

$\therefore a+b=10$

Clave D

15. $2x+y=17$ ...(1)
$z+2y=23$ ...(2)
$x+2z=23$ ...(3)

Sumando las tres ecuaciones:
$3(x+y+z)=63$
$x+y+z=21$ ...(4)

Luego de (2) y (3) obtenemos:
$z+2y=x+2z$
$2y=x+z$

Reemplazando este valor en (4):
$3y=21$
$y=7$

Luego: $x+z=14$

Nos piden:
$x+z-y=14-7=7$

Clave B

16. Resolviendo:

$x+y=3$ ... (I)
$5x-3y=7$ ... (II)
$ax+by=5b$ ... (III)

(I) $\times$3: $3x+3y=9$ ... (IV)

(II) + (IV):
$8x=16\Rightarrow x=2$
En (I): $2+y=3\Rightarrow y=1$

Reemplazando en (III):
$a(2)+b=5b$
$a=2b$

Clave E

17. El sistema:

$3x-my=1$
$5x-(2m+1)y=n-1$

Tiene infinitas soluciones, entonces se cumple:

$$\underbrace{\frac{3}{5}}_{(I)}=\underbrace{\frac{m}{2m+1}}_{(II)}=\underbrace{\frac{1}{n-1}}_{(III)}$$

De (I) y (II):
$6m+3=5m\Rightarrow m=-3$

De (I) y (III):
$3n-3=5\Rightarrow n=\frac{8}{3}$

Nos piden: $m+n=-3+\frac{8}{3}=-\frac{1}{3}$

Clave A

18. $$\frac{a-3}{3}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$$
$$3a-9=6$$
$$\Rightarrow a=5$$

$$\frac{a}{-5b}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$$

$3a=-10b$
$15=-10b$
$\Rightarrow b=-\frac{3}{2}$

$\therefore a-b=5+\frac{3}{2}=\frac{13}{2}$

Clave E

19. Del sistema:

$nx+y+z=1$ ...(I)
$x-y+z=2$ ...(II)
$x+y+nz=-1$ ...(III)

De (I) y (II):
$(n-1)x+2y=-1$ ...(α)

De (III) y (II):
$(1-n)x+(n+1)y=-1-2n$ ...(β)

De (α) y (β):

$$\frac{n-1}{1-n}=\frac{2}{n+1}=\frac{1}{1+2n}\quad ...(\theta)$$

Resolviendo (θ) se tiene: $n=-3\vee n=1$

Clave A

Resolución de problemas

20. Sea el sistema:

$3nx+6y=-2$
$2x-ny=-1$

Despejando x e y, además teniendo en cuenta que las soluciones pertenecen a la región: $E=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/\ x\le 0\wedge y\ge -1/3\}$

Se tiene:

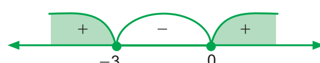
$$x=\frac{6+2n}{-(3n^2+12)}\le 0$$

$6+2n\ge 0\Rightarrow n\ge -3$ ...S_1

$$y=\frac{-4+3n}{(3n^2+12)}\ge -\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow n(n+3)\ge 0$

Resolviendo:



$n\in\langle-\infty;-3]\cup[0;+\infty\rangle$ ...S_2
$S_1\cap S_2$
$n\in[0;+\infty\rangle$
$\therefore n\ge 0$

Clave C

21. Sean x e y los jornales diarios del padre y del hijo, respectivamente, luego del enunciado:

$14x+24y=118$ ...(1)
$21x+19y=143$ ...(2)

$$\Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix}118 & 24\\143 & 19\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}14 & 24\\21 & 19\end{vmatrix}}=\frac{-1190}{-238}=5$$

$\Rightarrow x=5$
Reemplazando $x=5$ en (1):
$14(5)+24y=118$
$24y=48$
$\Rightarrow y=2$

$\therefore x-y=5-2=3$

Clave A

Nivel 2 (página 68) Unidad 3

Comunicación matemática

22.

23.

Razonamiento y demostración

24. Como el sistema:

$(m-1)x-(m-2)y=3$
$(m+1)x-(m-1)y=m+3$

tiene más de una solución, se cumple:

$$\underbrace{\frac{m-1}{m+1}}_{(I)}=\underbrace{\frac{m-2}{m-1}}_{(II)}=\underbrace{\frac{3}{m+3}}_{(III)}$$

De (I) y (II):
$m^2-2m+1=m^2-m-2$
$m=3$ ...(α)

De (II) y (III):

$m^2+m-6=3m-3$
$m^2-2m-3=0$
$m \quad -3$
$m \quad 1$
$m=3\vee m=-1$ ...(β)

De (I) y (III):
$m^2+2m-3=3m+3$
$m^2-m-6=0$
$m \quad -3$
$m \quad 2$
$m=3\vee m=-2$ ...(θ)

Luego de (α), (β) y (θ) se observa un único valor de m.
$\therefore m=3$

Clave B

25. Del sistema:

$(1-n)x + y - z = 0$ ...(I)
$2x - ny - 2z = 0$ ...(II)
$x - y - (n+1)z = 0$ ...(III)

De (I) y (II):
$2nx - (n+2)y = 0$ ...(IV)

De (I) y (III):
$n^2x - (n+2)y = 0$...(V)

De (IV) y (V):
$n^2x - 2nx = 0$
$xn(n-2) = 0$
$x \neq 0 \Rightarrow n(n-2) = 0$
$n_1 = 0 \;\vee\; n_2 = 2$
Piden: $n_1 + n_2 = 2$

Clave A

26. Del sistema:

$ax + y = 3$ ...(I)
$2x + ay = 4$ ...(II)
$2ax - 3y = 1$ ...(III)

Multiplicando a (I) por **a**:
$a^2x + ay = 3a$ ...(IV)

Restando (II) de (IV):
$$x = \frac{3a-4}{a^2-2}$$
Reemplazando en (I):
$$y = \frac{4a-6}{a^2-2}$$
Reemplazando en (III):
$$2a\left(\frac{3a-4}{a^2-2}\right) - 3\left(\frac{4a-6}{a^2-2}\right) = 1$$

Resolviendo se tiene:
$a^2 - 4a + 4 = 0$
$(a-2)^2 = 0 \Rightarrow a = 2$

Clave C

27. $\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = \frac{2}{15}\sqrt{x^2-y^2}$ ...(1)

$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = \frac{8}{15}\sqrt{x^2-y^2}$ ...(2)

Sumando (1) y (2):
$$2\sqrt{x+y} = \frac{10}{15}\sqrt{x^2-y^2}$$
$$\sqrt{x+y} = \frac{1}{3}\sqrt{x-y}\sqrt{x+y}$$
$\Rightarrow \sqrt{x-y} = 3$ ...(3)

Reemplazando $\sqrt{x-y} = 3$ en (1):
$$\sqrt{x+y} - 3 = \frac{2}{15}\sqrt{x^2-y^2}$$
$$\sqrt{x+y} - 3 = \frac{2(3)}{15}\sqrt{x+y}$$
$$\sqrt{x+y} - \frac{2}{5}\sqrt{x+y} = 3$$
$\frac{3}{5}\sqrt{x+y} = 3 \Rightarrow \sqrt{x+y} = 5$ ...(4)

De (3) y (4) se tiene:
$$\begin{aligned} x - y &= 9 \\ x + y &= 25 \\ \hline -2y &= -16 \Rightarrow y = 8 \end{aligned} \quad (-)$$

Clave B

28. $\frac{x+y-1}{x-y+1} = a$ ...(1)

$\frac{y-x+1}{x-y+1} = ab$ ...(2)

De la ecuación (1):
$x + y - 1 = ax - ay + a$
$(1+a)y = x(a-1) + a + 1$ ...(3)

De la ecuación (2):
$y - x + 1 = abx - aby + ab$
$(1+ab)y = x(ab+1) + ab - 1$ ...(4)

De (3) y (4) despejamos y:
$$\frac{x(a-1)+a+1}{1+a} = \frac{x(ab+1)+ab-1}{1+ab}$$
$$x\left(\frac{a-1}{1+a}\right) + 1 = x + \frac{ab-1}{1+ab}$$
$$x\left(\frac{a-1}{1+a} - 1\right) = \frac{ab-1}{1+ab} - 1$$
$$\frac{-2x}{1+a} = \frac{-2}{1+ab}$$
$$\therefore\; x = \frac{1+a}{1+ab}$$

Clave D

Resolución de problemas

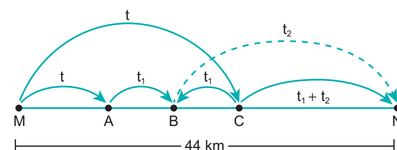
29. Resolviendo:
$2x^2 + 5xy - 10y^2 = 0$ ... (I)
$12y^2 - xy - 72 = 0$ ... (II)

Sumando (I) y (II):
$2x^2 + 4xy + 2y^2 - 72 = 0$
$x^2 + 2xy + y^2 = 36$
$(x+y)^2 = 6^2$
$x + y = 6 \vee x + y = -6$

Nos piden:
$(x+y)_{máx} - (x+y)_{mín} = 6 - (-6) = 12$

Clave B

30. Veloc. motociclista = 45 km/h
Veloc. amigo = 18 km/h



Cada espacio estará determinado por:
$MA = 18t$; $AB = 18t_1$; $BC = 45t_1$
$MC = 45t$
Lo cuál del gráfico afirmamos:
$MA + AB + BC = MC$
$18t + 18t_1 + 45t_1 = 45t$
$63t_1 = 27t$
$\frac{t}{t_1} = \frac{7k}{3k}$ ...(1)
Observamos también:
$CN = 18(t_1 + t_2)$
Luego:
$BN = BC + CN$
$45t_2 = 45t_1 + 18(t_1 + t_2)$
$45t_2 = 45t_1 + 18t_1 + 18t_2$
$(45 - 18)t_2 = 63t_1$
$27t_2 = 63t_1$
$\frac{t_2}{t_1} = \frac{7k}{3k}$ ...(2)

de (1) y (2):
$\frac{t}{7} = \frac{t_1}{3} = \frac{t_2}{7} = k$ ...(3)

Por dato del problema:
$MN = MC + CN$
$44 = 45t + 18(t_1 + t_2)$
$44 = 45(7k) + 18(3k + 7k)$
$44 = 495k$
$k = \frac{44}{495}$ ...(4)

Nos piden:
$BC = 45t_1 = 45(3k) = 45(3)\left(\frac{44}{495}\right)$
$BC = 12$ km

Clave D

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO
PLANTEO DE ECUACIONES

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 71) Unidad 3

Comunicación matemática

1.

I. Correcto (C)
$5x^2 - 20x = 0 \Rightarrow 5x(x - 4) = 0$
$\Rightarrow CS = \{0; 4\}$

II. Incorrecto (I)
$3x^2 - 27 = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 3) = 0$
$\Rightarrow CS = \{-3; 3\}$

III. Correcto (C)
$x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 4) = 0$
$\Rightarrow CS = \{-3; 4\}$

IV. Incorrecto (I)
$7x^2 - 21x = 0 \Rightarrow 7x(x - 3) = 0$
$\Rightarrow CS = \{0; 3\}$

2. Resolviendo obtenemos:

$x^2 - 4x + 5 = 0$
$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(5)$
$\Delta = 16 - 20$
$\Delta = -4$
$\Delta < 0$

Respuesta V

Razonamiento y demostración

3. Del radical
$16 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-4; 4]$

De la ecuación, tenemos:
$14 - x^2 = \sqrt{16 - x^2}$

Elevamos al cuadrado y reducimos:
$x^4 - 27x^2 + 180 = 0$
$x^2 \quad -15$
$x^2 \quad -12$

$\Rightarrow (x^2 - 15)(x^2 - 12) = 0$
$x^2 - 15 = 0 \quad \wedge \quad x^2 - 12 = 0$
$x^5 = 15 \quad \wedge \quad x^2 = 12$
$x = \pm\sqrt{15} \quad \wedge \quad x = \pm 2\sqrt{3}$

$\therefore$ Una raíz es: $2\sqrt{3}$

Clave E

4. De la ecuación:
$2x + 8x^2 = 4x + 5$
$8x^2 - 2x - 5 = 0$
Sean $x_1 \wedge x_2$ raíces.

Sabemos que:
$x_1 + x_2 = -\dfrac{(-2)}{8} = \dfrac{1}{4}$

Clave A

5. De la ecuación:
$x^2 - 3x - 6 = 0$
Sabemos que:
$x_1 + x_2 = \dfrac{-(-3)}{1} = 3 \quad \text{...(I)}$
$x_1x_2 = -\dfrac{6}{1} = -6 \quad \text{...(II)}$
$(I)^2: x_1^2 + \underbrace{2x_1x_2}_{-6} + x_2^2 = 9$
$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 21$

Clave B

6. $(m + 1)x^2 + 5x + (2m - 1) = 0$
$\Rightarrow x_1 . x_2 = \dfrac{2m - 1}{m + 1}$

Por dato: $x_1 . x_2 = \dfrac{5}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{5}{3} = \dfrac{2m - 1}{m + 1}$

$5m + 5 = 6m - 3$
$\therefore m = 8$

Clave D

7. Sean x_1; x_2 las raíces de la ecuación y como x_1; x_2 son simétricas, entonces:
$x_1 + x_2 = 0$
$\dfrac{-6(k - 7)}{8} = 0 \Rightarrow k - 7 = 0$
$\therefore k = 7$

Clave E

8. $3x^2 + 7x + 2k = 0$
Por dato:
$(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 6$
$x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9 = 6$

$\Rightarrow \dfrac{2k}{3} + 3\left(\dfrac{-7}{3}\right) + 9 = 6$
$\dfrac{2k}{3} + 2 = 6$
$\dfrac{2k}{3} = 4$
$\therefore k = 6$

Clave A

9. $x^2 - nx + 36 = 0$
Del enunciado:
$\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{5}{12}$

Luego:
$\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 . x_2} = \dfrac{5}{12}$

$\Rightarrow -\dfrac{(-n)}{36} = \dfrac{5}{12}$

$n = \dfrac{5}{12}.36$

$\therefore n = 15$

Clave E

Resolución de problemas

10. Si: $x_1 = 2x_2$

Entonces:
$x_1 + x_2 = \dfrac{-3}{2n}$

$3x_2 = -\dfrac{3}{2n} \Rightarrow x_2 = -\dfrac{1}{2n}$

Además:
$x_1 . x_2 = \dfrac{n}{2n}$

$2x_2^2 = \dfrac{1}{2}$

$x_2^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x_2 = \pm\dfrac{1}{2}$

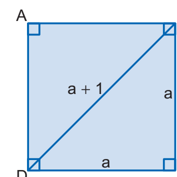
Para: $x_2 = +\dfrac{1}{2}$
$-\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow n = -1$

Para: $x_2 = -\dfrac{1}{2}$

$-\dfrac{1}{2n} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow n = 1 \qquad \therefore -1 + 1 = 0$

Clave B

11. Según el enunciado:
El lado del cuadrado: a
Su diagonal será: a + 1



Del ◺DCB:
$(a + 1)^2 = 2a^2$
$a = \left(1 + \sqrt{2}\right)cm$

Clave A

Nivel 2 (página 71) Unidad 3

Comunicación matemática

12.

Clave C

13.

Razonamiento y demostración

14. De la ecuación:
$64x^2 - 16x + 1 = k^2; k > 0$
$64x^2 - 16x + 1 - k^2 = 0$
$64x^2 - 16x + (1 - k)(1 + k) = 0$
$8x \quad -(1 + k)$
$8x \quad -(1 - k)$

Luego:
$(8x - 1 - k)(8x - 1 + k) = 0$
$8x - 1 - k = 0 \vee 8x - 1 + k = 0$

$x_1 = \underbrace{\dfrac{k + 1}{8}}_{\text{mayor raíz}} \vee x_2 = \dfrac{1 - k}{8}$

Clave D

15. $a = 3$; $b = 2$ y $c = -4$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-2}{3}$

$x_1 . x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-4}{3}$

$\therefore\ (x_1+5)(x_2+5) = x_1x_2 + 5(x_1+x_2) + 5^2$

$= \frac{-4}{3} + 5\left(\frac{-2}{3}\right) + 25 = \frac{61}{3}$

Clave C

16. $m + n = \frac{2}{3}$ y $m . n = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow R = \frac{m^2+n^2}{n.m}$

$(m+n)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$m^2 + n^2 + 2mn = \frac{4}{9}$

$m^2 + n^2 + \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow m^2 + n^2 = -\frac{2}{9}$

$\therefore\ R = \frac{-\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3}$

Clave E

17. $\frac{x+1}{x-1} = \frac{3x-1}{x+1}$

$(x+1)^2 = (3x-1)(x-1)$

Desarrollando:

$x^2 + 2x + 1 = 3x^2 - 3x - x + 1$

$2x^2 - 6x = 0$

$2x(x-3) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \vee x = 3$

Clave D

18. De la ecuación:

$2nx^2 + 4nx + n = 5x^2 - 7x - 1$

Reduciendo:

$(2n-5)x^2 + (4n+7)x + (n+1) = 0$

Como sus raíces son recíprocas se cumple:

$x_1x_2 = \frac{c}{a} = 1$

$\therefore\ \frac{n+1}{2n-5} = 1 \Rightarrow n = 6$

Clave C

19. De la ecuación:

$(3m-2)x^2 - (5m+2)x + 4m - 1 = 0$

Dato:

$x_1x_2 = \frac{11}{7}$

Sabemos que:

$x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4m-1}{3m-2} = \frac{11}{7}$

$28m - 7 = 33m - 22$

$5m = 15 \Rightarrow m = 3$

Clave C

20. $2x^2 - (a-3)x + 3 = 0$ ...(1)

Por dato:

$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 2 \Rightarrow \frac{n+m}{nm} = 2$

Además: n y m son raíces de la ecuación en (1).

$\Rightarrow \frac{\frac{(a-3)}{2}}{\frac{3}{2}} = 2 \Rightarrow \frac{a-3}{3} = 2\ \therefore a = 9$

Clave E

Resolución de problemas

21. $x^2 - (3n-2)x + (n^2-1) = 0$

Por dato:

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = k \wedge x_2 = 3k$

Luego:

$x_1 + x_2 = 3n - 2$

$\Rightarrow 4k = 3n - 2$ ...(1)

$x_1 . x_2 = n^2 - 1$

$k . 3k = n^2 - 1 \Rightarrow 3k^2 = n^2 - 1$ ...(2)

De (1) y (2):

$3\left(\frac{3n-2}{4}\right)^2 = n^2 - 1$

$\frac{3(9n^2 - 12n + 4)}{16} = n^2 - 1$

$27n^2 - 36n + 12 = 16n^2 - 16$

$11n^2 - 36n + 28 = 0$ ...(3)

Sean n_1 y n_2 las raíces de (3):

$\Rightarrow n_1 + n_2 = \frac{-(-36)}{11} = \frac{36}{11}$

Por lo tanto, la suma de los valores de n es: $\frac{36}{11}$

Clave D

22. Sea A el número de amigos.

- Ya que el alquiler es S/.4000, cada uno tendrá que pagar:

  S/. $\frac{4000}{A}$

- A última hora 2 desisten de viajar $\Rightarrow$ (A – 2) serán los que viajan, en este caso c/u pagará:

  S/.$\left(\frac{4000}{A} + 100\right)$

- El alquiler de la camioneta no variará, el costo lo asumirán estos (A – 2) amigos.

- Luego:

  (N.° amigos)(Pago de c/amigo) = Costo de alquiler camioneta

$(A-2)\left(\frac{4000}{A} + 100\right) = 4000$

$(A-2)\left(\frac{40+A}{A}\right) = 40$

$A(A-2) = 80$

$(A-2)A = 8 . 10$

$A = 10$

- Donde:

  Los amigos que se van de viaje:

  A – 2 = 8 amigos

- Lo que paga cada uno:

  $\frac{4000}{A} + 100 = \frac{4000}{8} + 100 = S/.600$

Clave E

Nivel 3 (página 72) Unidad 3

Comunicación matemática

23. Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación:

$ax^2 + bx + \frac{1}{2} = 0$

Afirmamos:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \wedge x_1x_2 = \frac{c}{a}$

Operando la ecuación:

$3\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} = 10$

$3\sqrt{x}^2 - 10\sqrt{x} + 3 = 0$

$3\sqrt{x}$ ⟶ -1

$\sqrt{x}$ ⟶ -3

$x_1 = \frac{1}{9} \vee x_2 = 9$

De la ecuación:

$ax^2 + bx + \frac{1}{2} = 0$

de raíces: $x_1 = \frac{1}{9} \vee x_2 = 9$ (dato)

$x_1 . x_2 = 1 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2a} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{1}{9} + 9 = -\frac{b}{\frac{1}{2}} \Rightarrow b = -\frac{41}{9}$

A) (C)

$a + b = \frac{1}{2} + \left(-\frac{41}{9}\right) = -\frac{73}{18}$

B) (C)

$x_2 = 9$

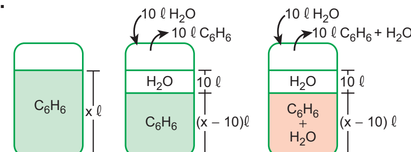
C) (C)

$x_1 = \frac{1}{9}$

D) (I)

$a - b = \frac{1}{2} - \left(-\frac{41}{9}\right) = \frac{1}{2} + \frac{41}{9} = \frac{91}{18}$

24.



Luego: $\frac{(x-10)^2}{x} = 83{,}25\%\ x$

Respuesta: III

25. Verificamos el ejemplo:

A: $x_1 = -1 \vee x_2 = 2$; B: $x_1 = -\frac{1}{3} \vee x_2 = 4$

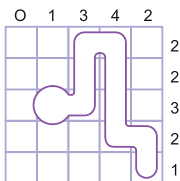
C: $x_1 = -\frac{1}{5} \vee x_2 = 4$; D: $x_1 = \frac{1}{2} \vee x_2 = 3$

E: $x_1 = -2 \vee x_2 = 2$; F: $x_1 = -\frac{1}{3} \vee x_2 = 2$

G: $x_1 = -1 \vee x_2 = 3$

Del ejercicio:

A. $(3x + 2)(x - 1) = 0$
B. $(x - 3)(x + 2) = 0$
C. $(x - 4)(2x + 1) = 0$
D. $(x - 2)(3x - 1) = 0$
E. $5(x - 2)(2x + 1) = 0$
F. $4(x - 2)(x + 7) = 0$
G. $(x - 3)(2x + 7) = 0$
H. $(x - 2)(x + 11) = 0$
I. $(x - 1)(x + 9) = 0$



Razonamiento y demostración

26. $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$

Luego:

$4x^2 + 8xy + 4y^2 + x^2 + y^2 + 2y - 2x + 2 = 0$

$(2x + 2y)^2 + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) = 0$

$4\underbrace{(x + y)^2}_{0} + \underbrace{(x - 1)^2}_{0} + \underbrace{(y + 1)^2}_{0} = 0$

$\Rightarrow x = 1 \wedge y = -1$

$\therefore xy + x + y = (1)(-1) + (1) + (-1) = -1$

Clave A

27. $x^2 + 9x + m = 0$

Dato: $x_1 = 2x_2$

Sabemos que:

(*) $x_1 + x_2 = \frac{-9}{1}$
$\downarrow$
$2x_2 + x_2 = -9 \Rightarrow x_2 = -3$ ...(I)

(*) $x_1x_2 = \frac{m}{1}$
$\downarrow$
$2x_2x_2 = m \Rightarrow x_2^2 = \frac{m}{2}$ ...(II)

De (I) y (II):

$(-3)^2 = \frac{m}{2} \Rightarrow m = 18$

Clave C

28. De la ecuación:

$3x^2 - 3x + 6 = 0$
$x^2 - x + 2 = 0$

Sabemos que:

$x_1 + x_2 = -(-1) = 1$ ... (I)
$x_1x_2 = 2$ ... (II)

Elevamos al cuadrado a (I):

$(x_1 + x_2)^2 = 1^2$

$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 1$

$x_1^2 + x_2^2 = 1 - 4 = -3$

Clave C

29. De la ecuación:

$(m + 3)x^2 - (m - 2)x + m + 3 = 0$

Dato: $x_1 + x_2 = \frac{3}{8}$

Sabemos que:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{[-(m-2)]}{m+3} = \frac{3}{8}$

$\frac{m-2}{m+3} = \frac{3}{8} \Rightarrow m = 5$

Clave E

30. De la ecuación:

$x^2 - 2x + 2 = 0$; CS = {m; n}

Sabemos que:

- $m + n = \frac{-(-2)}{1} = 2$
- $mn = \frac{2}{1} = 2$

Nos piden:

$E = m^{m+n} \,.\, n^{mn}$

Reemplazamos:

$E = m^2 \,.\, n^2 = (mn)^2 = 2^2 = 4$

Clave E

31. De la ecuación:

$(n - 2)x^2 - (2n - 1)x + n - 1 = 0$

Dato: $b^2 - 4ac = 25$

Reemplazando:

$[-(2n - 1)]^2 - 4(n - 2)(n - 1) = 25$

$4n^2 - 4n + 1 - 4(n^2 - 3n + 2) = 25$

$8n - 7 = 25$

$8n = 32 \Rightarrow n = 4$

Reemplazando en la ecuación:

$2x^2 - 7x + 3 = 0$

2x ╳ −1
x ╳ −3

$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 3$

$\therefore$ C.S. $= \left\{3; \frac{1}{2}\right\}$

Clave C

32. $4x^2 - 4(p + 3)x + p^2 + 4 = 0$

Dato: $x_1 = x_2$ (Raíz doble)

Se cumple:

$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 = 4ac$

Reemplazamos:

$[-4(p + 3)]^2 = 4(4)(p^2 + 4)$

$(p + 3)^2 = p^2 + 4$

$p^2 + 6p + 9 = p^2 + 4$

$\therefore p = \frac{-5}{6}$

Clave B

33. Dato: $x_1x_2 = 1$ (Raíces recíprocas)

Sabemos que:

$x_1x_2 = \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow a = c$

Reemplazamos:

$4 = p^2 + 4 \Rightarrow p = 0$

Clave B

Resolución de problemas

34. Sean x_1 y x_2 las raíces de:

$x^2 - (2a + 4) + a^2 + 8 = 0$

Si: $x_1 = 3x_2$

$\Rightarrow x_1 \,.\, x_2 = a^2 + 8$

$3x_2^2 = a^2 + 8 \Rightarrow x_2^2 = \frac{a^2 + 8}{3}$ ...(1)

Además:

$x_1 + x_2 = 2a + 4$

$4x_2 = 2a + 4 \Rightarrow x_2 = \frac{a + 2}{2}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$\left(\frac{a+2}{2}\right)^2 = \frac{a^2+8}{3}$

$\frac{a^2 + 4a + 4}{4} = \frac{a^2 + 8}{3}$

$3a^2 + 12a + 12 = 4a^2 + 32$

$0 = a^2 - 12a + 20$

a ╳ −10
a ╳ −2

$\Rightarrow a = 2 \wedge a = 10$

Por lo tanto, el mayor valor es: 10

Clave E

35. Sea P la cantidad de personas que asistieron a la reunión.

Personas	N.° apretones de mano	
1.°	P – 1	
2.°	P – 2	El apretón con la 1.ª persona no se toma en cuenta porque ya fue considerado.
3.° ⋮	P – 3 ⋮	El apretón con la 1.ª y 2.ª no se toma en cuenta porque ya fue considerado.
(n – 1)°	1	

$\text{Total} = 1 + 2 + 3 + ... + (P - 3) + (P - 2) + (P - 1)$

$= \frac{P(P-1)}{2}$

Luego:

$\frac{P(P-1)}{2} = 465$ (dato)

$(P - 1)P = 3031$

$P = 31$

$\therefore$ Asistieron 31 personas

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 76) Unidad 3

Comunicación matemática

1.

Clave D

2.

Razonamiento y demostración

3. La ecuación:

$x^3 - 3x^2 + 4x + 28$

Dato: $x = -2$

Luego:

	1	−3	4	28
x = −2	↓	−2	10	−28
	1	−5	14	0

Por lo tanto:

Las otras raíces satisfacen: $q(x) = x^2 - 5x + 14$

Clave C

4. Factorizamos por el método de divisores binómicos. Vemos que 2 es una raíz:

	3	−5	1	−6
2	↓	6	2	6
	3	1	3	0

$\Rightarrow 3x^3 - 5x^2 + x - 6 = (x-2)(3x^2 + x + 3)$

$(x-2)(3x^2 + x + 3) = 0$

$x - 2 = 0 \;\vee\; 3x^2 + x + 3 = 0$

$x = 2 \;\vee\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{35}\,i}{6}$

$\therefore CS = \left\{2; \frac{-1 - \sqrt{35}\,i}{6}; \frac{-1 + \sqrt{35}\,i}{6}\right\}$

Clave B

5. Por Cardano - Viette sabemos que:

$\underbrace{x_1 + x_2}_{3\text{ (dato)}} + x_3 = 7$

$\Rightarrow x_3 = 4$

Clave E

6. Por propiedad

Ecuación bicuadrada =

$x^4 + \underbrace{\begin{pmatrix}\text{Suma de}\\ \text{productos}\\ \text{binarios}\end{pmatrix}}_{\text{datos: } -\frac{3}{2}} x^2 + \underbrace{\begin{pmatrix}\text{producto}\\ \text{raíces}\end{pmatrix}}_{\text{dato} = -20} = 0$

$\Rightarrow$ La ecuación: $x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 20 = 0$

$\therefore$ La ecuación es: $2x^4 - 3x^2 - 40 = 0$

Clave C

7. $(x - 1)$ es factor, aplicamos Ruffini:

	1	A	B	−1	0
1		1	A + 1	A + B + 1	A + B
	1	(A + 1)	(A + B + 1)	(A + B)	

$\Rightarrow A + B = 0$

Clave A

8. $CS = \left\{-\frac{m}{n}; -\frac{n}{m}; \frac{1}{a}; a\right\}$

$12x^4 - 4x^3 - 41x^2 - 4x + 12 = 0$

Factorizando:

	12	−4	−41	−4	12
2		24	40	−2	−12
	12	20	−1	−6	0
1/2		6	13	6	
	12	26	12	0	

$\Rightarrow (x-2)(x - \frac{1}{2})(12x^2 + 26x + 12) = 0$

4x ⨯ 6

3x ⨯ 2

$(x-2)(x - \frac{1}{2})(4x + 6)(3x + 2) = 0$

$x = 2 \;\vee\; x = \frac{1}{2} \;\vee\; x = -\frac{3}{2} \;\vee\; x = -\frac{2}{3}$

$C.S = \left\{-\frac{m}{n}; -\frac{n}{m}; \frac{1}{a}; a\right\} = \left\{-\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 2\right\}$

$\Rightarrow m = 2 \; (m < n)$

$n = 3$

$a = 2$

Piden:

$m^2 + n^2 + a^2 = 4 + 9 + 4 = 17$

Clave D

9. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 4$

Por teorema del valor intermedio:

$x = 0 \Rightarrow P(0) = -4$

$x = 1 \Rightarrow P(1) = 1$

$P(0)P(1) < 0$

$\therefore x \in \langle 0; 1\rangle$

Clave A

Resolución de problemas

10. De la ecuación:

$x^3 + 4ax + b - 2004 = 0; a < 0$

Dato: $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$

$2x_2 = x_1 + x_3$

Sabemos que:

$\underbrace{x_1 + x_3}_{} + x_2 = 0$ → $3x_2$

$3x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

Además:

$x_1x_2x_3 = -(b - 2004) = 0$

$b = 2004$

Reemplazando en la ecuación:

$x^3 + 4ax = 0$

$x^3 = -4ax \Rightarrow x^2 = -4a$

$x = \pm 2\sqrt{-a}$

Un valor es: $x = -2\sqrt{-a}$

Clave C

11. Dada la ecuación:

$x^3 - 12x^2 + ax - 28 = 0$

Dato: $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2} \Rightarrow 2x_2 = x_1 + x_3$

Sabemos que:

$x_1 + x_2 + x_3 = -(-12)$

$3x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 4$

Reemplazamos en la ecuación:

$4^3 - 12(4)^2 + 4a - 28 = 0$

$\therefore a = 39$

Clave A

Nivel 2 (página 77) Unidad 3

Comunicación matemática

12. A) V

$P(x) = ax^5 + bx^4 + 0x^3 + 0x^2 + bx + a$

Es una ec. recíproca

B) V

Por Cardano - Viette.:

C) F

Las raíces son: $(2 + \sqrt{3})$ y $(2 - \sqrt{3})$

D) V

E) V

Clave C

13.

Razonamiento y demostración

14. Dada la ecuación:

$x^3 + ax + b = 0 \quad ...(\theta)$

Sabemos que:

$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad ...(I)$

$x_1 . x_2 . x_3 = -b$

Dato:

$x_1 . x_2 . x_3 = x_1 + x_2$

$-b = x_1 + x_2 \quad ...(II)$

Reemplazando (II) en (I):

$-b + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = b$

Reemplazando $x_3 = b$ en la ecuación θ:

$b^3 + ab + b = 0$

$b(b^2 + a + 1) = 0$

$\therefore b^2 + a + 1 = 0$

Clave B

15. Dada la ecuación:

$4x^3 + (3b - 12 - 4c)x^2 + (13c - 3bc)x - c^2 = 0$

Factorizando:

	4	(3b − 12 − 4c)	(13c − 3bc)	$-c^2$
x = c		4c	(3bc − 12c)	c^2
	4	(3b − 12)	c	0

Dato:

$4x^2 + (3b - 12)x + c = 0;\ CS = \left\{\alpha; \dfrac{1}{\alpha}\right\}$

Sabemos que:

$\alpha \cdot \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{c}{4} = 1 \Rightarrow c = 4$

Clave D

16. Dada la ecuación:

$2x^3 - 3x^2 + 3x - 10 = 0$

Factorizando:

	2	−3	3	−10
x = 2	↓	4	2	10
		2	1	5	0

Luego:

$(x - 2)(2x^2 + x + 5) = 0$

$2x^2 + x + 5 = 0$; CS = {a; b} (raíces imaginarias)

Sabemos que:

$a + b = -\dfrac{1}{2}$

$ab = \dfrac{5}{2}$

Nos piden:

$M = a^2b + ab^2 = ab(a + b)$

Reemplazando:

$\therefore M = \dfrac{5}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{5}{4}$

Clave E

17. Dada la ecuación:

$(5k^2 + 2)x^4 - (4k^4 + 9)x^2 + 3(k^2 + 2) = 0$

Sabemos que:

$x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{3(k^2 + 2)}{5k^2 + 2} = 1$

$3k^2 + 6 = 5k^2 + 2$

$2k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm\sqrt{2}$

Clave E

18. Observamos que H es la suma de las raíces inversas aumentadas en 2.

$\Rightarrow$ Para aumentar las raíces en 2, hacemos:

$(x - 2)^3 - 7(x - 2) - 2 = 0$

$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 7x + 14 - 2 = 0$

$x^3 - 6x^2 + 5x + 4 = 0$

(Tiene raíces $x_1 + 2$; $x_2 + 2$; $x_3 + 2$)

$\Rightarrow$ Para obtener la ecuación con raíces inversas

$P(x) = P\left(\dfrac{1}{x}\right) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^3 - 6\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 + \dfrac{5}{x} + 4 = 0$

Multiplicamos por (x^3):

$4x^3 + 5x^2 - 6x + 1 = 0$ (tiene raíces $\dfrac{1}{x_1 + 2}; \dfrac{1}{x_2 + 2}; \dfrac{1}{x_3 + 2}$

$\Rightarrow \Sigma$ de raíces de la nueva ecuación por Cardano-Viette:

$\dfrac{-5}{4}$

Clave C

Resolución de problemas

19. Del dato:

$16x^4 - 32x^3 + 72x^2 + mx + n = \underbrace{(ax^2 + bx + c)^2}_{\text{desarrollando}}$

$a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2$

Por comparación ya que los polinomios son idénticos, tenemos:

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

$2ab = -32 \Rightarrow b = -4$

$b^2 + 2ac = 72 \Rightarrow c = 7$

$2bc = m \Rightarrow m = -56$

$c^2 = n \Rightarrow n = 49$

$\therefore m + n = -7$

Clave E

20. De la ecuación:

$x^3 + 2x + 2 = 0$; CS = {a; b; c} ...(θ)

Dato:

$y_1 = \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{b^2 + c^2}{bc}$

$y_2 = \dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{c} = \dfrac{c^2 + a^2}{ac}$

$y_3 = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = \dfrac{a^2 + b^2}{ab}$

Sabemos de (θ) que:

$a + b + c = 0$ ...(I)

$ab + bc + ac = 2$ ...(II)

$abc = -2$ ...(III)

De (I): $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac)$

$a^2 + b^2 + c^2 = -2(2) = -4$

Luego:

$y_1 = -\dfrac{(4 + a^2)a}{abc} = \dfrac{a^3 + 4a}{2}$ ...(α)

En la ecuación: x = a

$a^3 + 2a + 2 = 0 \Rightarrow a^3 = -2 - 2a$

Reemplazando en (α):

$y_1 = \dfrac{4a - 2a - 2}{2} = a - 1$

Análogamente:

$y_2 = b - 1$

$y_3 = c - 1$

Se observa que en la nueva ecuación su raíz disminuye en una unidad.

La ecuación por propiedad será:

$(y + 1)^3 + 2(y + 1) + 2 = 0$

Desarrollando:

$y^3 + 3y^2 + 5y + 5 = 0$

Clave A

Nivel 3 (página 78) Unidad 3

Comunicación matemática

21.

22. Dando forma a la ecuación:

$ix^3 + 3x^2 - 3ix - 1 + 3 = 0$

$(-ix - 1)^3 + 3 = 0$

$-(ix + 1)^3 = -3 \Rightarrow (ix + 1)^3 = 3$

$ix + 1 = \begin{cases} \sqrt[3]{3} \\ \sqrt[3]{3}\,w \\ \sqrt[3]{3}\,w^2 \end{cases}$

Donde: 1, w, w^2 son raíces cúbicas de 1.

Se observa que hay 3 raíces imaginarias.

(I) F

(II) V

(III) F

Clave D

23. De la ecuación:

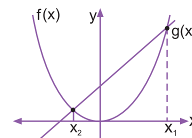
$P(x) = x^4 - x - 3 = 0$

$x^4 = x + 3$

Sea:

$f(x) = x^4 \wedge g(x) = x + 3$

Graficando:



I. Tiene dos raíces reales (una positiva y una negativa). ...(F)

II. $|x_1| > |x_2|$ ...(V)

$\left|\dfrac{x_1}{x_2}\right| > 1$

III. Por teorema:

$P(1) = -3$

$P\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{19}{16}$

Luego:

$P(1) \cdot P\left(\dfrac{3}{2}\right) < 0$

Entonces: una raíz positiva se localiza en $\left\langle 1; \dfrac{3}{2}\right\rangle$...(V)

Clave D

Razonamiento y demostración

24. Como es una ecuación recíproca de grado par:

Factorizamos x^2:

$x^2\left[x^2 + x - 4 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right] = 0;\ x \neq 0$

asociando

$x^2\left[\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 4\right] = 0$ ... (α)

De la condición:

$z = x + \dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} = z^2 - 2$

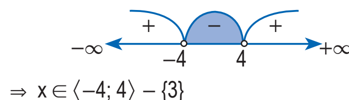
Sustituyendo en α:

$x^2(z^2 + z - 6) = 0$

Clave D

25. Ordenamos y usamos aspa doble para factorizar:

$x^4 - 6x^3 - 7x^2 + 96x - 144 < 0$



$\Rightarrow \underbrace{(x^2 - 16)}\underbrace{(x^2 - 6x + 9)} < 0$

$(x - 4)(x + 4)(x - 3)^2 < 0$

$\Rightarrow x \neq 3$

$(x - 4)(x + 4) < 0$

(Recta numérica: $-\infty$, +, -4, −, 4, +, $+\infty$)

$\Rightarrow x \in \langle -4; 4\rangle - \{3\}$

Clave E

26. $x^3 + x^2 - 1 = 0$

Sea **a** una raíz, entonces:

$a^3 + a^2 - 1 = 0$

Por teorema de Cardano-Viette tenemos:

$abc = 1$

Reemplazando:

$a^3 + a^2 - abc = 0$

$\Rightarrow a^2 + a - bc = 0$

$\Rightarrow a^2 - bc = -a$

Análogamente con b y c.

Piden:

$M = \dfrac{a\sqrt{-a}}{\sqrt{a^2 - bc}} + \dfrac{b\sqrt{-b}}{\sqrt{b^2 - ac}} + \dfrac{c\sqrt{-c}}{\sqrt{c^2 - ab}}$

$M = \dfrac{a\sqrt{-a}}{\sqrt{-a}} + \dfrac{b\sqrt{-b}}{\sqrt{-b}} + \dfrac{c\sqrt{-c}}{\sqrt{-c}}$

$M = a + b + c = \dfrac{-1}{1}$ (suma de raíces)

$\therefore M = -1$

Clave B

Resolución de problemas

27. Por el teorema de paridad de raíces:

$-i$ y $1 - i$ son también raíces.

Por Cardano - Viette:

$(i)(1 + i)(-i)(1 - i)x_5 = \dfrac{-(-12)}{6}$

$x_5 = 1$

Por el teorema del factor:

$P(x) = a_o(x - 1)(x - i)(x - 1 - i)(x + i)(x - 1 + i)$

Para determinar a_o evaluamos: $P(0) = -12$

$-12 = a_o(-1)(-i)(-i - 1)(i)(-1 + i)$

$\underbrace{(-1)(-)}_{1}\underbrace{(i + 1)(i - 1)}_{-2}$

$\Rightarrow a_o = 6$

$\Rightarrow 6x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + cx - 12$

$\equiv 6(x - 1)(x - i)(x - 1 - i)(x + i)(x - 1 + i)$

Evaluamos para $x = 2$:

$6 \,.\, 2^5 + 16a + 8b + 4c + 2d - 12$

$\equiv 6(1)(2 - i)(1 - i)(2 + i)(1 + i)$

Sacando factor 2 a ambos miembros:

$96 + 8a + 4b + 2c + d - 6 = 3(4 - i^2)(1 - i^2)$

$\therefore\ 8a + 4b + 2c + d = -60$

Clave D

28. De la ecuación:

$f(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$

Factorizando:

	1	0	0	–a	–a	1
x = –1	.	–1	1	–1	(a + 1)	–1
	1	–1	1	–(a + 1)	1	0
x = –1		–1	2	–3	a + 4	
	1	–2	3	–(a + 4)	a + 5	

grado $\leq$ 3

Por dato:

$a + 5 = 0 \Rightarrow a = -5$

Clave C

29. De la ecuación:

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \,;\, c \neq 0$

Sea $CS = \{x_1; x_2; x_3\}$

Dato: (Progresión geométrica):

$(x_2)^2 = x_1x_3$ ...(I)

Además:

$x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 = -c$ ...(II)

(I) en (II):

$(x_2)^3 = -c$ ...(III)

Cambiamos los coeficientes de los términos equidistantes:

$cx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$

Sea $CS = \left\{\dfrac{1}{x_1}; \dfrac{1}{x_2}; \dfrac{1}{x_3}\right\}$

Dato: (Progresión aritmética):

$\dfrac{1}{x_2} = \dfrac{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_3}}{2}$

$\dfrac{2}{x_2} = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_3}$ ...(α)

Además:

$\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = -\dfrac{b}{c}$ ...(β)

(α) en (β):

$\dfrac{3}{x_2} = -\dfrac{b}{c} \Rightarrow x_2 = -\dfrac{3c}{b}$

Elevando al cubo:

$x_2^3 = -27\dfrac{c^3}{b^3}$ ...(IV)

De (III) y (IV):

$-c = -27\dfrac{c^3}{b^3} \Rightarrow b^3 = 27c^2$

Clave D

30. Dada la ecuación:

$P(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 8 = 0$

Un procedimiento para calcular la suma de las énesimas potencias de sus raíces es el siguiente:

$P'(x) = 3x^2 + 6x + 5$ (derivada)

Luego:

1	3	6	5	0	0	0	0 ...
–3		–9	–15	–24			
–5			9	15	24		
–8				3	5	8	
					18	30	48
						–141	–235
							309 ...
	3	–3	–1	–6	47	–103	122
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	S^0	S^1	S^2	S^3	S^4	S^S	S^6

Nos piden:

$x_1{}^6 + x_2{}^6 + x_3{}^6 = S^6 = 122$

Clave C

31. De la ecuación:

$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + 864 = 0$

Dato:

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 48$ ...(I)

Sabemos que:

$x_1x_2x_3x_4 = 864$

Dando forma:

$(x_1)(2x_2)(3x_3)(4x_4) = 20\,736 = 12^4$

Luego:

$MA = \dfrac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4}{4}$

$MA = \dfrac{48}{4} = 12$

$MG = \sqrt[4]{(x_1)(2x_2)(3x_3)(4x_4)}$

$MG = \sqrt[4]{12^4} = 12$

$\Rightarrow MA = MG$

Se cumple:

$x_1 = 2x_2 = 3x_3 = 4x_4 = 12$

$\Rightarrow x_1 = 12$

$2x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 6$

$3x_3 = 12 \Rightarrow x_3 = 4$

$4x_4 = 12 \Rightarrow x_4 = 3$

Nos piden:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$

Clave D

MARATÓN MATEMÁTICA
(página 79) Unidad 3

1. $H = a\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$H^2 = a^2\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = a^2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = -a^2 I$ (I es la matriz identidad)

$\Rightarrow H^{2013} = (H^2)^{1006} . H$

Reemplazando:

$H^{2013} = (-a^2 I)^{1006} . H$

$\therefore H^{2013} = a^{2012} . H$

Clave E

2. $|x^2 - 9| = x + 3$

Entonces:

$x^2 - 9 = x + 3 \quad \vee \quad x^2 - 9 = -3 - x$

$x^2 - x - 12 = 0 \quad \vee \quad x^2 + x - 6 = 0$

x ⟋⟍ −4   x ⟋⟍ 3

x   3   x   −2

$\Rightarrow (x = 4 \vee x = -3) \vee (x = -3 \vee x = 2)$

$\therefore$ CS = {−3; 2, 4}

Clave C

3. Nos piden: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2}$ ...(1)

Por Cardano:

$x_1 + x_2 = 2 \wedge x_1x_2 = \dfrac{-5}{3}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$\therefore \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = -\dfrac{6}{5}$

Clave C

4. IV
III
II
I
V

5. Traz (A) = Traz (A^t) = 7 + 2 − 4 = 5

$a_{32} = 3$

$\therefore$ Traz(A) + Traz (A^t) + a_{32} = 5 + 5 + 3 = 13

Clave A

6. C, ya que: det(A) = −3

7. B es nilpotente $\Rightarrow B^n = 0 \Rightarrow B^{n+4} = 0$

A es idempotente $\Rightarrow A^2 = A \Rightarrow A^4 = A$

$\therefore A^4 + B^{n+4} = A$

Clave B

8. $\underbrace{\text{Det(A)}} = 10$

$3x^2 - (-x) = 10$

$3x^2 + x - 10 = 0$

3x ⟋⟍ −5

x   2

$\Rightarrow x = \dfrac{5}{3} \vee x = -2$

Clave E

9. Sabemos que:

$|x - 1| \geq 0$

$|x - 1| + 2 \geq 2$

Como la base de la ecuación exponencial es mayor que 1, usamos:

$b^x > b^y$ si $b > 1 \Rightarrow x > y$

$\Rightarrow (|x - 1| + 2)^{3x^2 + 5x - 30} > (|x - 1| + 2)^{15 - x}$

$\Rightarrow 3x^2 + 5x - 30 > 15 - x$

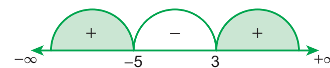
$3x^2 + 6x - 45 > 0$

$x^2 + 2x - 15 > 0$

x ⟋⟍ 5

x   −3

$\Rightarrow (x + 5)(x - 3) > 0$



CS = $\langle -\infty; -5\rangle \cup \langle 3; +\infty\rangle$

$\therefore$ Complemento: [−5; 3]

Clave D

10. $f_2 \longleftarrow f_2 + f_1$

$\begin{vmatrix}x-2 & 0 & -1 & 2\\ -1 & x & 0 & 0\\ 0 & -1 & x & 0\\ 0 & 0 & -1 & x\end{vmatrix} < 0$

$(x-2)\begin{vmatrix}x & 0 & 0\\ -1 & x & 0\\ 0 & -1 & x\end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix}0 & -1 & 2\\ -1 & x & 0\\ 0 & -1 & x\end{vmatrix} < 0$

$(x - 2)x^3 + (-x + 2) < 0$

$(x - 2)(x^3 - 1) < 0$

$(x - 2)(x - 1)(x^2 + x + 1) < 0$

$(x - 2)(x - 1) < 0 \Rightarrow x \in \langle 1; 2\rangle$

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 84) Unidad 4

Comunicación matemática

1. (V) $\forall$ a; b $\in \mathbb{R}^+$: $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2} \geq \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}$

$\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$

(V) $\forall$ a; b $\in \mathbb{R}^+$ se cumple:

MA $\geq$ MG $\geq$ MH

(V) $\forall$ a; b $\in \mathbb{R}^+$ se cumple:

$$\frac{a+\overbrace{b+b+..+b}^{n\text{ veces}}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a\,.\,b^n}$$

$$\frac{a+nb}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a.b^n}$$

Clave B

2. El conjunto de valores admisibles garantiza la existencia del valor de las variables para que una expresión matemática esté bien definida.

Razonamiento y demostración

3. $2x^2-4x+1 > 2M;\ \forall x \in \mathbb{R}$

$2(x^2-2x+1)-1 > 2M$

$2(x-1)^2-1 > 2M$

$2(x-1)^2 > 2M+1;\ \forall x \in \mathbb{R}$ ...(1)

$2(x-1)^2_{mín.} = 0$

De (1):

$\Rightarrow 0 > 2M+1 \Rightarrow -\frac{1}{2} > M$

$\therefore M_{máx.} = -1$

Clave E

4. $\frac{x+3}{x-5} \leq m$

$1+\frac{8}{x-5} \leq m$ ...(1)

Como:

$\forall x \in [2; 4]$

$\Rightarrow 2 \leq x \leq 4$

$-3 \leq x-5 \leq -1$

$\frac{8}{-3} \geq \frac{8}{x-5} \geq -8$

$\frac{-5}{3} \geq 1+\frac{8}{x-5} \geq -7$ ...(2)

De (1) y (2):

El menor número racional que toma m es: $-\frac{5}{3}$

Clave C

5. $E = x^4+\frac{4z^2}{x^2}+\frac{9}{xz}$

$2E = 2x^4+\frac{8z^2}{x^2}+\frac{9}{xz}+\frac{9}{xz}$

$\frac{E}{2} = \dfrac{2x^4+\frac{8z^2}{x^2}+\frac{9}{xz}+\frac{9}{xz}}{4}$

$\frac{E}{2} \geq \sqrt[4]{(2x^4)\left(\frac{8z^2}{x^2}\right)\left(\frac{9}{xz}\right)\left(\frac{9}{xz}\right)}$

$\frac{E}{2} \geq \sqrt[4]{16\,.\,81} = \sqrt[4]{2^4\,.\,3^4} = 6$

$\Rightarrow E \geq 12$

$\therefore E_{mín.} = 12$

Clave E

6. $1+6x-x^2 \leq M$

$0 \leq x^2-6x+M-1$

$\Rightarrow \Delta = (-6)^2-4(1)(M-1) \leq 0$

$36 \leq 4(M-1)$

$9 \leq M-1$

$\Rightarrow 10 \leq M$

Por lo tanto:

El menor número M es 10.

Clave D

7. Factorizando:

$(x+7)(8+2x-x^2)+x^2+3x-28 > 0$

x ⟍⟋ +7

x ⟋⟍ −4

$(x+7)(8+2x-x^2+x-4) > 0$

$(x+7)(-x^2+3x+4) > 0$

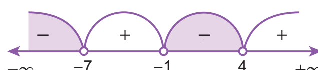
$(x+7)(x^2-3x-4) < 0$

x ⟍⟋ −4

x ⟋⟍ +1

$\Rightarrow (x+1)(x+7)(x-4) < 0$

Puntos críticos: −1; −7 y 4



$\therefore$ CS = $\langle -\infty; -7\rangle \cup \langle -1; 4\rangle$

Clave E

8. De la inecuación:

$(x-1)(x-3) \geq k;\ \forall x \in \mathbb{R}$

$x^2-4x+3-k \geq 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$

Se cumple:

$(-4)^2-4(1)(3-k) \leq 0$

Desarrollando:

$k \leq -1$

Piden:

$k_{máx.} = -1$

Clave A

9. De la inecuación:

$abx^2-(a^2+b^2)x+ab < 0;\ 0 < a < b$

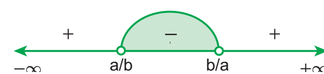
ax ⟍⟋ −b

bx ⟋⟍ −a

$(ax-b)(bx-a) < 0;\ \ 0 < a < b$

Puntos de corte:

P.C. = $\left\{\frac{b}{a}; \frac{a}{b}\right\}$



$\therefore\ x \in \left\langle \frac{a}{b}; \frac{b}{a}\right\rangle$

Clave B

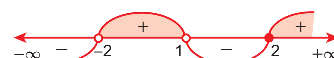
10. $\frac{x-2}{x^2+x-2} \geq 0$

$\frac{x-2}{(x+2)(x-1)} \geq 0$

Tomando en cuenta:

$x+2 \neq 0 \quad \wedge \quad x-1 \neq 0$

$x \neq -2 \qquad\quad x \neq 1$



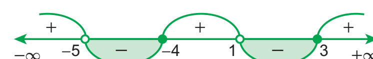
$\therefore\ x \in \langle -2; 1\rangle \cup [2; +\infty\rangle$

Clave A

11. $\frac{(x-3)(x+4)}{(x-1)(x+5)} \leq 0$

$x-1 \neq 0 \quad \wedge \quad x+5 \neq 0$

$x \neq 1 \qquad\quad x \neq -5$



$\therefore x \in \langle -5; -4] \cup \langle 1; 3]$

Clave B

12. Como $x^2+1 > 0$, tenemos:

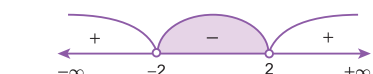
$x^2+kx+1 < 2x^2+2$

$0 < x^2-kx+1;\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \Delta < 0$

$(-k)^2-4(1)(1) < 0 \Rightarrow k^2-4 < 0$

$(k-2)(k+2) < 0$



$\therefore\ k \in \langle -2; 2\rangle$

Clave D

Resolución de problemas

13. De la inecuación:

$x^2-\sqrt{k-3}\,x+5 > 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$

Se cumple:

$(-\sqrt{k-3})^2-4(1)(5) < 0$

$k-3 < 20$

$k < 23$ ...(I)

Además:

$k-3 \geq 0 \Rightarrow k \geq 3$ ...(II)

(I) $\cap$ (II):

$3 \leq k < 23$

$k \in \mathbb{Z} = \{3; 4; 5; \ldots; 22\}$

Piden, número de elementos: 20

Clave B

14. Sea x la edad de los mellizos.

Primer mellizo:

$x - \frac{1}{5}(x-3) \le 19$

$5x - x + 3 \le 95$

$4x \le 92$

$x \le 23 \qquad (1)$

Segundo mellizo:

$x - \frac{1}{6}(x-5) \ge 20$

$6x - x + 5 \ge 120$

$5x \ge 115$

$x \ge 23 \qquad (2)$

De (1) y (2): $x = 23$ años

Clave E

Nivel 2 (página 85) Unidad 4

Comunicación matemática

15. I. $m + \frac{1}{m} \ge 2; \forall m \in \mathbb{R}^+$ ...(F)

II. $a^2 + b^2 + c^2 \le ab + ac + bc; \forall\, a; b; c \in \mathbb{R}$

Se sabe:

MA ≥ MG

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^2+b^2}{2} &\ge ab \Rightarrow a^2+b^2 \ge 2ab \\ \frac{b^2+c^2}{2} &\ge bc \Rightarrow b^2+c^2 \ge 2bc \\ \frac{a^2+c^2}{2} &\ge ac \Rightarrow a^2+c^2 \ge 2ac \end{aligned}\right\}(+)$$

$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ac$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \le ab + ac + bc; \forall a; b; c \in \mathbb{R}$ ...(F)

III. $9a + \frac{1}{b^2} \ge \frac{6\sqrt{a}}{b}; \forall\, a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R} - \{0\}$

Se sabe:

MA ≥ MG

$$\frac{9a + \frac{1}{b^2}}{2} \ge \sqrt{9a \cdot \frac{1}{b^2}}$$

$$9a + \frac{1}{b^2} \ge 2\left(3\sqrt{a} \cdot \frac{1}{b}\right)$$

$$9a + \frac{1}{b^2} \ge \frac{6\sqrt{a}}{b}$$

$\Rightarrow 9a + \frac{1}{b^2} \ge \frac{6\sqrt{a}}{b}; \forall a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R} - \{0\}$ ...(V)

∴ FFV

Clave C

16. • $\frac{b-1}{a} < a^{-1}; (a < 0)$

$a\left(\frac{b-1}{a}\right) > a \cdot a^{-1}$

$b - 1 > 1 \Rightarrow b > 2 \qquad$ ...(F)

• $a(a-b) > b(a-b); (a > b)$

$(a-b)(a-b) > 0$

$(a-b)^2 > 0 \qquad$ ...(V)

• $\frac{b}{a-b} > \frac{b}{a}$

$b\left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a}\right) > 0$

Multiplicando por $b^{-1} < 0$:

$\left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a}\right) < 0$

$\Rightarrow \frac{1}{a-b} < \frac{1}{a}$ ...(F)

• $\frac{b^2}{a} < b$

$b\left(\frac{b}{a} - 1\right) < 0$

Pero $b < 0$

$\Rightarrow \frac{b}{a} - 1 > 0$

$$\frac{\overset{(-)}{\overbrace{b-a}}}{\underset{(-)}{\underbrace{a}}} > 0 \qquad ...(V)$$

Clave D

Razonamiento y demostración

17. Dato:

$x > -1 \Rightarrow x + 1 > 0$

Observación

Teorema:

$\forall x > 0 \qquad \forall x < 0$

$x + \frac{1}{x} \ge 2 \qquad x + \frac{1}{x} \le -2$

Entonces:

$(x+1) + \left(\frac{1}{x+1}\right) \ge 2$

$x + \frac{1}{x+1} \ge 1$

∴ El mínimo valor que toma la expresión es: 1

Clave E

18. Según el enunciado, la ecuación:

$x^2 - 2x + m = 0$

Debe tener raíces positivas; entonces:

$(-2)^2 - 4m \ge 0$

$m \le 1$

Además, se sabe: $x_1x_2 = m > 0$

Luego:

$0 < m \le 1$

∴ $m \in \langle 0; 1]$

Clave B

19. De la ecuación:

$x^2 - (m-1)x + 3 - m = 0$

Dato:

$x_1 + x_2 = m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1$ ...(I)

$x_1 \cdot x_2 = 3 - m > 0 \Rightarrow 3 > m$ ...(II)

De (I) ∧ (II):

$1 < m < 3$

$\Rightarrow m \in \mathbb{N} = \{2\}$

Reemplazando en la ecuación:

$x^2 - x + 1 = 0$

$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$

∴ No tiene raíces reales.

Luego m no existe.

Clave B

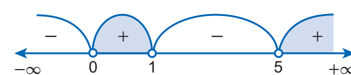
20. $$\frac{(x-5)^5(x+2)^2(x-1)^3}{x(x+3)^4} > 0$$

Analizando se tiene:

$\frac{(x-5)(x-1)}{x} > 0 \wedge x \ne \{0; -3; -2\}$

$\Rightarrow x(x-5)(x-1) > 0 \wedge x \ne \{0; -3; -2\}$

Puntos críticos: 0; 1 y 5



CS = ⟨0; 1⟩ ∪ ⟨5; +∞⟩

∴ Un intervalo que pertenece al CS es: ⟨0; 1⟩

Clave E

21. De la inecuación:

$$-[(3x+2m)^2 + (2x-3m)^2]\underbrace{(x^2-4x+4)}_{(x-2)^2}(x-2)^6 > 0$$

$[(3x+2m)^2 + (2x-3m)^2](x-2)^8 < 0$

$\Rightarrow (3x+2m)^2 + (2x-3m)^2 < 0$

Resolviendo:

$(3^2 + 2^2)(x^2 + m^2) < 0$

$x^2 + m^2 < 0$

$\underbrace{x^2}_{+} < \underbrace{-m^2}_{-}$

$\therefore x \in \varnothing$

Clave E

22. $\frac{x+3}{x-5} - \frac{x+1}{x-2} > 0$

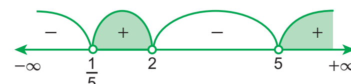
Resolviendo:

$$\frac{(x+3)(x-2)-(x+1)(x-5)}{(x-5)(x-2)} > 0$$

$$\frac{x^2+x-6-(x^2-4x-5)}{(x-5)(x-2)} > 0$$

$$\frac{(5x-1)}{(x-5)(x-2)} > 0 \Rightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{5}\right)}{(x-5)(x-2)} > 0$$

Gráficamente:



$CS = \left\langle \frac{1}{5}; 2 \right\rangle \cup \langle 5; +\infty \rangle$

Clave D

23. $$\frac{x-1}{x^2-5x+6} - \frac{x-2}{x^2-7x+12} \ge 0$$

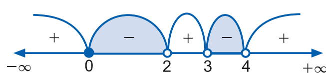
$$\frac{x-1}{(x-3)(x-2)} - \frac{x-2}{(x-3)(x-4)} \ge 0$$

$$\frac{1}{x-3}\left[\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-4}\right] \ge 0$$

$$\frac{1}{x-3}\left[\frac{x^2-5x+4-(x^2-4x+4)}{(x-2)(x-4)}\right] \ge 0$$

$$\frac{-x}{(x-3)(x-2)(x-4)} \geq 0$$

$$\frac{x}{(x-3)(x-2)(x-4)} \leq 0$$



CS = $[0; 2\rangle \cup \langle 3; 4\rangle$

$\Rightarrow a = 0; b = 2; c = 3$ y $d = 4$

$\therefore T = a + b + c + d = 9$

Clave E

24. De la inecuación:

$\sqrt{x+6} + \sqrt{4x+24} < 3x$

$\sqrt{x+6} + 2\sqrt{x+6} < 3x$

$\sqrt{x+6} < x$

Donde:

$x + 6 \geq 0 \wedge x > 0 \wedge x + 6 < x^2$

$x \geq -6 \wedge x > 0 \wedge x^2 - x - 6 > 0$

$\underbrace{x \geq -6 \wedge x > 0} \wedge \underbrace{(x-3)(x+2) > 0}$

$x > 0 \quad \wedge \quad$ P.C. = $\{-2, 3\}$

$\underbrace{x > 0 \quad \wedge \quad (x < -2 \vee x > 3)}$

$x > 3$

$\therefore x \in \langle 3; +\infty\rangle$

Clave E

Resolución de problemas

25. Analizando las modalidades:

Modalidad A

$x \leq 50$

Con los datos del problema: $3{,}20x > 860$

$\Rightarrow x > 268{,}75$

Es mayor que la cantidad límite de la condición inicial ($x \leq 50$); por consiguiente no cumple con dicha condición.

Modalidad B

$x > 50$

Con los datos del problema:

$3{,}20x > 860 + 1{,}80(x - 50)$

$3{,}20x > 860 + 1{,}80x - 90$

$\Rightarrow x > 550$

Este resultado sí cumple con la condición inicial ($x > 50$), concluimos que $x_{mín} = 551$; entonces la suma de las cifras es: $5 + 5 + 1 = 11$

Clave C

26. Sea:

Q: El número de páginas del libro de química.

F: El número de páginas del libro de física.

Veamos de acuerdo al enunciado:

$Q = 4F$ (1)

$Q + F < 130$ (2)

$Q > 96$ (3)

Reemplazando (1) en (2) y (3):

$4F + F \langle\, 130 \Rightarrow F \,\langle\, 26$

$4F \,\rangle\, 96 \Rightarrow F \,\rangle\, 24$

La solución está en este intervalo:

$24 \,\langle\, F \,\langle\, 26$

Como $F \in z^+ \Rightarrow F = 25$ págs.

Clave A

Nivel 3 (página 85) Unidad 4

Comunicación matemática

27. I. $-1 < x < 5 \quad \Rightarrow -2 < 2x < 10;$

$3 < 2x + 5 < 15 \Rightarrow \frac{1}{15} < \frac{1}{2x+5} < \frac{1}{3}$

$\frac{1}{5} < \frac{3}{2x+5} < 1 \Rightarrow x \in \left\langle \frac{1}{5}; 1\right\rangle;$

$\left\langle \frac{1}{5}; 1\right\rangle \subset \langle 0; 1\rangle \Rightarrow x \in \langle 0; 1\rangle$ ...(V)

II. • $\frac{16-x}{x+2} + 1 - 1 = \frac{18}{x+2} - 1$

• $0 \leq x < 4 \Rightarrow 2 \leq x + 2 < 6 \Rightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{1}{x+2} < \frac{1}{2};$

$3 \leq \frac{18}{x+2} < 9 \Rightarrow 2 \leq \frac{18}{x+2} - 1 < 8$

$\Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{\frac{16-x}{x+2}} < 2\sqrt{2};$

• $0 \leq x < 4 \Rightarrow -1 < 1 - \sqrt{x} \leq 1;$

$\sqrt{2} + 1 < \sqrt{\frac{16-x}{x+2}} - \sqrt{x} + 1 < 2\sqrt{2} + 1;$

$\sqrt{\frac{16-x}{x+2}} - \sqrt{x} + 1 > 0$ ... (V)

III. $\frac{x-1}{x+3} > x \Rightarrow \frac{x-1}{x+3} - x > 0 \Rightarrow \frac{-x^2-2x-1}{x+3} > 0;$

$\frac{x^2+2x+1}{x+3} < 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{x+3}; (x+1)^2 > 0;$

$\Rightarrow x + 3 < 0 \Rightarrow x < -3$ ... (V)

Clave E

28.

IN	T	ERVALO
TEO	R	EMA
DES	I	GUALDAD
INECUA	C	IONES
FRACCI	O	NARIAS
CONJUN	T	O
VAL	O	RES
AD	M	ISIBLES
PR	I	MER
GR	A	DO

Razonamiento y demostración

29. $x^2 \leq 2x + 1, x \in [m; n]$

$x^2 - 2x - 1 \leq 0$ ...(I)

Construimos la inecuación:

$(x - m)(x - n) \leq 0$

$x^2 - (m + n)x + mn \leq 0$ ...(II)

(I) = (II), entonces:

$m + n = 2 \wedge mn = -1$

Nos piden:

$m^{-1} + n^{-1} = \frac{m+n}{mn} = -2$

Clave D

30. Resolviendo en $\mathbb{Z}$:

$(x - 3)(4 - x) > -x$

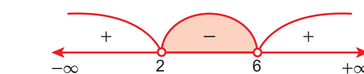
Desarrollando:

$x^2 - 8x + 12 < 0$

$(x - 6)(x - 2) < 0$

Puntos de corte:

P.C. = $\{2; 6\}$



$x \in \langle 2; 6\rangle \Rightarrow x \in \mathbb{Z} = \{3;4;5\}$

Piden:

Σ soluciones enteras $= 3 + 4 + 5 = 12$

Clave E

31. De la ecuación:

$2x^2 - (m + 1)x + m + 1 = 0; m \in \mathbb{Z}$

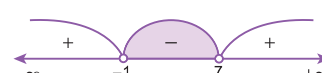
Dato: raíces imaginarias.

Entonces se cumple:

$[-(m + 1)]^2 - 4(2)(m + 1) < 0$

$(m + 1)(m - 7) < 0$

P.C. = $\{-1; 7\}$



$m \in \langle -1; 7\rangle$

$\therefore$ Mínimo entero = 0

Clave C

32. $\frac{(x+2)(x-1)(x-4)}{x+5} \geq \frac{(x+2)(x-1)(x-4)}{x+6}$

$\frac{(x+2)(x-1)(x-4)}{x+5} - \frac{(x+2)(x-1)(x-4)}{x+6} \geq 0$

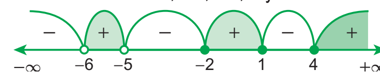
$(x+2)(x-1)(x-4)\left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6}\right) \geq 0$

$\Rightarrow \frac{(x+2)(x-1)(x-4)}{(x+5)(x+6)} \geq 0$

$(x + 2)(x - 1)(x - 4)(x + 5)(x + 6) \geq 0 \wedge$

$x \neq \{-6; -5\}$

Puntos críticos: $-6; -5; -2; 1$ y 4.



CS = $\langle -6; -5\rangle \cup [-2; 1] \cup [4; +\infty\rangle$

$\therefore$ Un intervalo solución es: $[4; +\infty\rangle$.

Clave C

33. Sabemos que:

MA $\leq$ MP

$MP = \sqrt[n]{\frac{a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n}{n}}$

Además:

$\Rightarrow \frac{x + x + y + y}{4} \leq \sqrt[4]{\frac{x^4 + x^4 + y^4 + y^4}{4}}$

$\left(\frac{x+y}{2}\right)^4 \leq \left(\sqrt[4]{\frac{x^4+y^4}{2}}\right)^4$

$$\frac{1}{16} \le \frac{x^4+y^4}{2}$$

$$\frac{1}{8} \le x^4+y^4 \qquad ...(1)$$

Además:

$$\frac{\lambda}{16} \le x^4+y^4 \qquad ...(2)$$

De (1) y (2):

$$\frac{\lambda}{16} \le \frac{1}{8} \Rightarrow \lambda \le 2$$

Clave C

34. $\dfrac{x^3-1}{x-1} < x^2-x+9;\ x-1 \ne 0 \qquad ...(1)$

$$\frac{x^3-1}{x-1} - (x^2-x+9) < 0$$

$$\frac{x^3-1-x^3+x^2-9x+x^2-x+9}{x-1} < 0$$

$$\frac{2x^2-10x+8}{x-1} < 0$$

$$\frac{x^2-5x+4}{x-1} < 0$$

$$\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)} < 0$$

$$x < 4 \quad ...(2)$$

Los valores enteros positivos que satisfacen (1) y (2) son: {2; 3}

Piden: $2+3=5$

Clave D

35. $k \le \dfrac{x^2+1+16}{\sqrt{x^2+1}}$

Sea: $a = x^2+1$

$$k \le \frac{a+16}{\sqrt{a}}$$

$$k \le \sqrt{\frac{(a+16)^2}{a}}$$

$$k \le \sqrt{\frac{a^2+32a+16^2}{a}}$$

$$k \le \sqrt{a+\frac{16^2}{a}+32} \qquad ...(1)$$

Como:

$$\frac{a+\frac{16^2}{a}}{2} \ge \sqrt{a.\frac{16^2}{a}} = 16$$

$$a+\frac{16^2}{a} \ge 32$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+\frac{16^2}{a}+32} \ge 8 \qquad ...(2)$$

De (1) y (2):

$\therefore k_{máx.} = 8$

Clave C

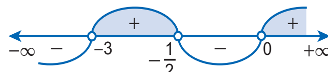
36. $\dfrac{x-2}{x+3} < \dfrac{x+1}{x}$

$$\frac{x-2}{x+3} - \frac{x+1}{x} < 0$$

Reduciendo:

$$\frac{-3(2x+1)}{x(x+3)} < 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{x(x+3)} > 0$$

Puntos críticos: $\left\{-\frac{1}{2};\ 0;\ -3\right\}$



$$x \in \langle -3; -\tfrac{1}{2}\rangle \cup \langle 0; +\infty\rangle$$

Un intervalo es: $\langle -3; -\frac{1}{2}\rangle$

Clave A

37. $\underbrace{(x-1)^3(x^2+3x+4)}_{a}(x^3-1) > 0 \quad ...(1)$

Analizando **a**:

x^2+3x+4

$\Delta = 3^2 - 4(1)(4)$

$\Delta = -7 < 0$

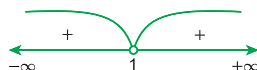
$\Rightarrow x^2+3x+4 \ge 0 \ ...(2)$

En (1) teniendo en cuenta (2):

$\Rightarrow (x-1)^3(x^3-1) > 0$

$(x-1)^3(x-1)\underbrace{(x^2+x+1)}_{\ge 0} > 0$

$(x-1)^4 > 0$



$CS = \langle -\infty; 1\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$

↓ a ↓ b

$\therefore a^2+b^2 = 2$

Clave C

Resolución de problemas

38. x: las veces que ríe

y: las veces que se alegra

z: las veces que susurra

$x+y<8 \qquad (1)$

$z<x \qquad (2)$

$3<y-z \qquad (3)$

Sumamos las desigualdades (1) y (3):

$x+y+3<8+y-z$

$x+z<5 \qquad (4)$

Sumamos las desigualdades (2) y (4):

$x+z+z<x+5$

$2z<5$

$z<2{,}5$

z puede tomar los valores: 1; 2

(Asumir que los valores de x; y, $z \in z^+$)

Si: $z=1$

en (1) $x+y<8 \qquad (5)$

en (2) $1<x \qquad (6)$

en (3) $4<y \qquad (7)$

Sumamos (5) y (7):

$x+y+4<8+y$

$x<4 \qquad (8)$

De (6) y (8):

$1<x<4$

$x=2;\ 3$

Si: $x=2$

en (5): $y<6 \qquad 4<y<6 \Rightarrow y=5$

de (7): $4<y$

Si: $x=3$

en (5): $y<5 \qquad 4<y<5;\ y\in\mathbb{Z}^+$

de (7): $4<y \qquad \Rightarrow y\notin\mathbb{Z}^+$

Si: $z=2$

en (1): $x+y<8 \quad (9)$

en (2): $2<x \quad (10)$

en (3): $5<y \quad (11)$

Sumamos (9) y (11):

$x+y+5<8+y$

$x<3 \qquad (12)$

De (10) y (12):

$2<x<3;\ x\in\mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow x\notin\mathbb{Z}^+$

Luego:

$x=2;\ y=5;\ z=1$

Nos piden en el siguiente orden:

$x=2;\ z=1;\ y=5$

Clave B

39. M: el número de goles que hace Mario

N: el número de goles que hace Néstor

P: el número de goles que hace Pablo

$M+N+P>5 \qquad (1)$

$N+3>M+P \qquad (2)$

$P>N \qquad (3)$

$3>N \qquad (4)$

Sumando (1) y (2):

$M+N+P+N+3>5+M+P$

$2N>2$

$N>1 \qquad (5)$

De (4) y (5): $1<N<3;\ M;\ N;\ P\in\mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow N=2$

$N=2$ en (1): $\quad M+P>3 \quad (6)$

$N=2$ en (2): $\quad 5>M+P \quad (7)$

$N=2$ en (3): $\quad P>2 \quad (8)$

de (6) y (7): $\quad 3<M+P<5$

$M+P=4 \quad (9)$

de (8): $P>2 \Rightarrow M<2$

$M=1 \Rightarrow P=3$

Número de goles que hizo Mario: 1

$M=1$

Clave A

FUNCIONES

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 87) Unidad 4

1. $(2; a) = (2; 2a - 3)$

$a = 2a - 3 \Rightarrow a = 3$

$(a^2 - 1; b) = (8; 2)$

$\downarrow$

$(3^2 - 1; b) = (8; 2)$

$(8; b) = (8; 2) \Rightarrow b = 2$

$\therefore\ a + b^2 = 3 + 2^2 = 7$

Clave C

2. $f(x) = x^2 - 4x + 1 = x^2 - 4x + (4 - 3)$

$f(x) = (x^2 - 4x + 4) - 3 = (x - 2)^2 - 3$

Calculamos el rango, partiendo del dominio:
$-2 < x \leq 5$

Restando –2, a toda la desigualdad:
$-4 < x - 2 \leq 3$

Elevando al cuadrado a toda la desigualdad:
$0 \leq (x - 2)^2 < 16$

Restando –3, a toda la desigualdad:
$-3 \leq \underbrace{(x - 2)^2 - 3}_{f(x)} < 13$

$\therefore$ Ran(f) = $[-3; 13\rangle$

Clave E

3. $F(x) = x^2 + 10x + 30$

$F(x) = x^2 + 10x + 25 + 5$

$F(x) = (x + 5)^2 + 5$

Como: $(x + 5)^2 \geq 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$

$(x + 5)^2 + 5 \geq 5$

$F(x) \geq 5$

$\therefore$ Ran(F) = $[5; +\infty\rangle$

Clave D

4. Dada la función:

$F(x) = y = \dfrac{5x - 1}{x + 3}$ ...(I)

$x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$

$\Rightarrow$ Dom(F) = $\mathbb{R} - \{-3\}$

De (I):

$xy + 3y = 5x - 1$

$xy - 5x = -(1 + 3y)$

$x = -\dfrac{(1 + 3y)}{y - 5}$

$y - 5 \neq 0 \Rightarrow y \neq 5$

$\Rightarrow$ Ran(F) = $\mathbb{R} - \{5\}$

Nos piden: Dom(F) $\cap$ Ran(F) = $\mathbb{R} - \{-3; 5\}$

Clave D

5. $y = \dfrac{2x + 1}{x - 3}$

$xy - 3y = 2x + 1$

$xy - 2x = 3y + 1$

$x(y - 2) = 3y + 1$

$x = \dfrac{3y + 1}{y - 2}$

$\Rightarrow y - 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y \neq 2$

$\therefore$ Ran(F) = $\mathbb{R} - \{2\}$

Clave B

6. $4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4$

$\Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

$\therefore x \in [-2; 2]$

Clave A

7. $[\![\sqrt{3}]\!] = [\![1,73...]\!] = 1$

$\forall\ x > 0\ \ |x| = x$; reemplazamos en M:

$M = 1 + \dfrac{x}{x} = 1 + 1 = 2$

Clave A

8. De la definición:

$\text{Dom}(f \circ g)(x) = \{x / \underbrace{x \in \text{Dom } g}_{(I)} \wedge \underbrace{g(x) \in \text{Dom } f}_{(II)}\}$

(I) Dom g(x): $|x| - 3 \geqslant 0$

$|x| \geqslant 3$

$x \geqslant 3 \ \vee\ x \leqslant -3$

(II) $g(x) \in \text{Dom } f \Rightarrow \text{Dom } f:\ x - 2 \geq 0$

$x \geq 2$

$\sqrt{|x| - 3} \in [2\,; +\infty>$

$\sqrt{|x| - 3} \geq 2$

$|x| - 3 \geq 4$

$|x| \geq 7$

$x \geq 7 \vee x \leq -7$

(I) $\cap$ (II):



$\Rightarrow x \in \langle -\infty; 7\,] \cup [7; +\infty\rangle$

Equivalente a $x \in \mathbb{R} - \langle -7; 7\rangle$

Clave C

9. $y = \sqrt{x + 4} - 5$

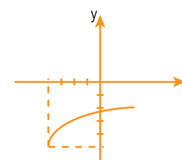
Partimos de $y = \sqrt{x}$

$y = \sqrt{x + 4}$

$\Rightarrow$ Desplazamiento horizontal 4 $\leftarrow$

$y = \sqrt{x + 4} - 5$

$\Rightarrow$ Desplazamiento vertical 5 $\downarrow$



Clave C

10.

$y_1 = -2x^2 + 16x - 32$

$A_\Delta = \dfrac{AC \times h}{2}$ ...(I)

$(x; 0) \in y_1$

$\Rightarrow 0 = -2(x^2) - 16x - 32$

$x^2 + 8x + 16 = 0$

$(x + 4)^2 = 0$

$x = -4$

$(C;0) \in y^2$

$0 = -2C + 6$

$C = 3$

$(0; B) \in y_2$

$B = -2(0) + 6$

$B = 6$

$m\overline{AC} = m\overline{AO} + m\overline{OC}$

$\Rightarrow$ Longitud AC= $|-4| + |3| = 7$

$h = B = 6$

De (I): $A_\Delta = \dfrac{6 \times 7}{2} = 21\ u^2$

Clave C

11. I. (I) Simétrica al origen

II. (P) Simétrica al eje y

III. (I) $f(-x) = -f(x) \rightarrow f(-x) = -x^5 - x^3 - x$

$f(-x) = -\underbrace{(x^5 + x^3 + x)}_{f(x)}$

IV) (P) $f(-x) = f(x) \rightarrow f(-x) = \sqrt{|-x|}$

$f(-x) = \underbrace{\sqrt{|x|}}_{f(x)}$

V) (P) $f(-x) = f(x) \rightarrow f(-x) = (-x)^4 - |-x|$

$f(-x) = \underbrace{x^4 - |x|}_{f(x)}$

$\therefore$ N° funciones impares: 2

Clave C

12. Para probar si existe, comprobamos si es inyectiva: $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

$\dfrac{2x_1 - 1}{x_1 + 2} = \dfrac{2x_2 - 1}{x_2 + 2}$

$2x_1 x_2 - x_2 + 4x_1 - 2 = 2x_1 x_2 - x_1 + 4x_2 - 2$

$5x_1 = 5x_2$

$x_1 = x_2 \Rightarrow$ es inyectiva $\Rightarrow \exists$

Para hallar la regla de correspondencia, despejamos x:

$y = \dfrac{2x - 1}{x + 2}$

$x = \dfrac{2y + 1}{2 - y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{2x + 1}{2 - x}$

Para hallar el dominio hallamos el rango de f(x):

$f(x) = \dfrac{2x - 1 + 5 - 5}{x + 2} \Rightarrow 2 - \dfrac{5}{x + 2}$

$3 \leq x$

$5 \leq x + 2$

$0 < \dfrac{1}{x + 2} \leq \dfrac{1}{5}$

$0 < \dfrac{5}{x + 2} \leq 1$

$-1 \leq \dfrac{-5}{x + 2} < 0$

$1 \leq 2 - \dfrac{5}{x + 2} < 2$

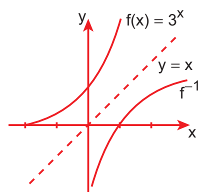
$\Rightarrow \text{Dom } f^{-1} = \text{Ran } f(x) = [1;2\rangle$

Clave B

13. Tabulamos valores:

x	–2	–1	0	1	2
3^x	1/9	1/3	1	3	9

f^{-1} se refleja en y = x



Clave D

14. Para que sea biyectiva tiene que ser suryectiva e inyectiva.

⇒ Dom [a; 5] ∧ Ran [0; b] (suryectiva)

Y para que sea inyectiva debe ser estrictamente creciente o decreciente.

$\Rightarrow \quad F(a) = 0 \quad ; \quad F(5) = b$

$a^2 - 4a - 32 = 0 \; ; \; 5^2 - 4(5) - 32 = b$

$a^2 - 4a - 32 = 0 \qquad b = -27$

$a = 8 \vee a = -4$

Vemos que el rango decrece ⇒ como es inyectiva el dominio debe decrecer

⇒ a = 8

F: [8; 5] → [–10; –27]

a + b = –19

Clave D

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 89) Unidad 4

Comunicación matemática

1. IV. el dominio es la tercera parte del rango. O el rango es el triple que el dominio.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4. Para que:

$F = \{(2; 5), (-1; 4), (2; 2a^2 - b), (-1; b - a^2)\}$

Sea función, se debe tener:

$2a^2 - b = 5 \qquad ...(1)$

$b - a^2 = 4 \qquad ...(2)$

De (1) y (2):

$a^2 = 9$

$\Rightarrow a = 3 \vee a = -3 \quad (a > 0)$

$\therefore \quad a = 3 \wedge b = 13$

$\Rightarrow \; a + b = 16$

Clave D

5. Dada la función:

$M = \{(10; 5), (-7; -3), (10; 2a - b), (-7; b - a), (3a + b; b)\}$

Se cumple:

$2a - b = 5$

$b - a = -3$

Resolviendo:

$a = 2 \wedge b = -1$

Nos piden:

$5a - b = 5(2) - (-1) = 11$

Clave E

6. Del dato: $-3 < x \leq 2$

Multiplicando por 3: $-9 < 3x \leq 6$

Sumando 4, a toda la igualdad:

$-5 < \underbrace{3x + 4}_{f(x)} \leq 10$

$\therefore \text{Ran}(f) = \langle -5; 10]$

Clave C

7. Dada la función:

$F(x) = \sqrt{x - 6} - 3$

Se tiene que:

$x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 6$

$\therefore \text{Dom}(F) = [6; +\infty\rangle$

Clave B

8. $F(x) = \begin{cases} 4x + 5; x < 0 & ...(I) \\ 3x - 4; x \geq 0 & ...(II) \end{cases}$

De (II): x = 1

$F(1) = 3(1) - 4 = -1$

De(I): x = –1

$F(-1) = 4(-1) + 5 = 1$

De (II): x = 0

$F(0) = 3(0) - 4 = -4$

De(I): x = –4

$F(-4) = 4(-4) + 5 = -11$

Nos piden:

$F[\underbrace{F(1)}_{-1}] - F[\underbrace{F(0)}_{-4}] =$

$F(-1) - F(-4) = 1 - (-11) = 12$

Clave E

9. $F(-3) = [\![-3]\!] + \sqrt{-(-3) + 1} + |-3|$

$= -3 + \sqrt{-(-3) + 1} + 3$

$F(-3) = -3 + 2 + 3$

$F(-3) = 2$

Clave E

10. $f \circ g(x) = f(g(x))$

$\Rightarrow f \circ g(3) = f(g(3)) = f(3^2 - 2) = f(7)$

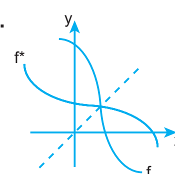
$= f(7) = 7 - 1 = 6$

$\Rightarrow f \circ g(5) = f(g(5)) = f(5^2 - 2) = f(23)$

$= f(23) = 23 - 1 = 22$

$\therefore f \circ g(3) + f \circ g(5) = 6 + 22 = 28$ **Clave B**

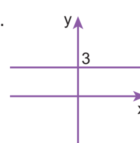
11.



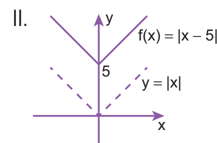
Clave D

Resolución de problemas

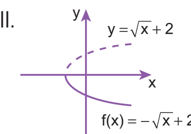
12. I.



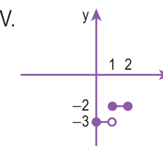
II.



III.



IV.



Dominio de f(x):

$x \in [0; 1\rangle$

$x \in [1; 2\rangle$

$f(x) \in [-3; -2\rangle$

$= -3$

$f(x) \in [-2; -1\rangle$

$= -2$

13. Factorizando los términos de la función racional se tiene:

$f(x) = \dfrac{(x + 2)(x - 1)(x + 3)}{(x + 3)(x - 1)}$

Simplificando:

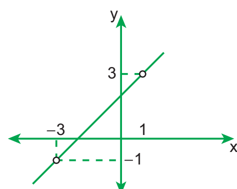
$f(x) = x + 2; \; x \neq -3 \; \wedge \; x \neq 1$

Si: $x = -3 \Rightarrow y = -3 + 2 = -1$

$x = 1 \Rightarrow y = 1 + 2 = 3$

Entonces, los puntos excluidos son:
(– 3; – 1), (1; 3)
$\therefore$ Dom(f) = $\mathbb{R}$ –{–3; 1}
Ran(f) = $\mathbb{R}$ –{–1; 3}

Graficando:



14. Dada:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1; \text{ si } |x| \leq x, \text{ si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}; \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

(*) $f_1(x) = x + 1$
Si $x \geq 0 \Rightarrow x + 1 \geq 1$
$f_1(x) \geq 1$

$\text{Ran}(f_1) = [1; +\infty\rangle$

(*) $f_2(x) = -\sqrt{-x}$
Si $x < 0 \Rightarrow -x > 0$
$\sqrt{-x} > 0$
$-\sqrt{-x} < 0$
$f_2(x) < 0$
$\text{Ran}(f_2) = \langle -\infty; 0\rangle$

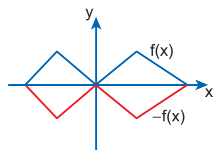
Luego:
$\text{Ran}(f) = \text{Ran}(f_1) \cup \text{Ran}(f_2)$
$= \langle -\infty; 0\rangle \cup [1; +\infty\rangle$
$\Rightarrow \text{Ran}(f) = \mathbb{R} - [0; 1\rangle$

Clave E

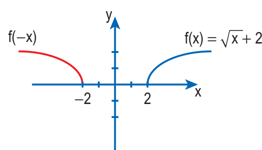
Nivel 2 (página 90) Unidad 4

Comunicación matemática

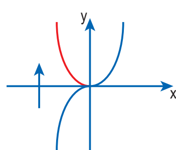
15. – f(x) es simétrica al eje x



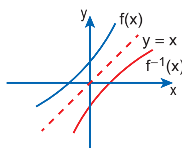
f(–x) es simétrica al eje y; graficamos:



|f(x)| refleja la parte negativa de y en el eje x



$f^{-1}(x)$ se relfeja en y = x



16. (V) Ran (H) = [0; 6]; Ran (F) = [0; 3]
Son diferentes.

Clave E

17. $= \dfrac{(g+f)(f(6)) - 8 - 5}{g(g(6))}$

$= \dfrac{(g+f)(7) - 13}{g(8)}$

$= \dfrac{g(7) + f(7) - 13}{5}$

$= \dfrac{6 + 6 - 13}{5} = -\dfrac{1}{5}$

Clave C

Razonamiento y demostración

18. Dada la función:
G = {(3; 5), (8; –3), (4; 12), (3; a + 4), (4; n – 5)}

Se cumple:
$a + 4 = 5 \Rightarrow a = 1$
$n - 5 = 12 \Rightarrow n = 17$

Además se tiene:
F = {(1; 9), (5; 13), (–2; 5), (17; 7)}
Nos piden:
$\sqrt{F(a) + F(n)} = \sqrt{F(1) + F(17)} = \sqrt{9 + 7}$
$\therefore \sqrt{F(a) + F(n)} = 4$

Clave A

19. Dadas las funciones:
F(x) = 3x + 5a ...(I)
G(x) = (b + 2)x + 7 ...(II)
F(G(x)) = 9x – 4 ...(III)
De (I): x → G(x)
F(G(x)) = 3G(x) + 5a
↓
(b + 2)x + 7
F(G(x)) = 3(b + 2)x + 21 + 5a ...(IV)

Luego:
De (IV) y (III):
3(b + 2)x + 21 + 5a = 9x – 4

Comparando:
- $3(b + 2) = 9 \Rightarrow b = 1$
- $21 + 5a = -4 \Rightarrow a = -5$

Nos piden: F(b) = F(1)

Reemplazando:
a = –5, b = 1 y x = 1 en (I):
$\therefore$ F(b) = F(1) = 3(1) + 5(–5) = –22

Clave E

20. G(x) = |2x – 1| – x

Sea: $2x -+ 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{1}{2}$
Luego:
G(x) = 2x – 1 – x
$G(x) = x - 1; x \geq \dfrac{1}{2}$
$x - 1 \geq \dfrac{1}{2} - 1 \Rightarrow x - 1 \geq -\dfrac{1}{2}$

$\text{Ran}(G_1) = \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right\rangle$

Sea: $2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \dfrac{1}{2}$
Luego:
G(x) = 1 – 2x – x
$G(x) = -3x + 1; x < \dfrac{1}{2}$
$3x < \dfrac{3}{2} \Rightarrow -3x > -\dfrac{3}{2}$

$-3x + 1 > -\dfrac{1}{2}$

$\text{Ran}(G_2) = \left\langle -\dfrac{1}{2}; +\infty\right\rangle$
$\text{Ran}(G) = \text{Ran}(G_1) \cup \text{Ran}(G_2)$
$\therefore \text{Ran}(G) = \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right\rangle$

Clave A

21. $T = \left\{(x; y)/y = \sqrt{25 - x^2}\right\}$
Analizando:
$25 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 25$
$0 \leq x^2 \leq 25$ ...por (–1):
$0 \geq -x^2 \geq -25$
Sumamos 25:
$25 \geq 25 - x^2 \geq 0$

Luego:
$5 \geq \sqrt{25 - x^2} \geq 0$
$\therefore 5 \geq y \geq 0$

Clave E

22. Dada la función:

$$F(x) = \begin{cases} 3x^2 - 16; -4 \leq x \leq 2 & \text{...(I)} \\ 2x + 7; \ 2 < x \leq 4 & \text{...(II)} \end{cases}$$

De (I):
$-4 \leq x \leq 2$
Elevamos al cuadrado:
$0 \leq x^2 \leq 16$

Multiplicamos por 3:
$0 \leq 3x^2 \leq 48$

Restamos 16:
$-16 \leq 3x^2 - 16 \leq 32$

$\text{Ran}(F_1) = [-16; 32]$

De (II):
$2 < x \leq 4$

Multiplicamos por 2:
$4 < 2x \leq 8$

Sumamos 7:
$11 < 2x + 7 \leq 15$

$\text{Ran}(F_2) = \langle 11; 15]$

Luego:
$\text{Ran}(F) = \text{Ran}(F_1) \cup \text{Ran}(F_2)$
$\therefore \text{Ran}(F) = [-16; 32]$

Clave C

23. Como F(x) es función real.

$x^2 + x - 6 \geq 0 \wedge [\![x-1]\!] + 3 > 0$ (denominador $\neq 0$)

x ↗ 3
x ↘ −2

$(x+3)(x-2) \geq 0$ $\qquad$ $[\![x-1]\!] > -3$

Propiedad de ⟦ ⟧:
$x - 1 \geq -2$
$x \geq -1$



$x \in \langle -\infty; -3] \cup [2; \infty\rangle$ ...(I)



...(II)

Domf(x): (I) ∩ (II)
$x \in [2; +\infty\rangle$

Clave B

24. De la definición:

$\text{Dom}(f \circ g) = \{x / \underbrace{x \in \text{Domg}(x)} \wedge \underbrace{g(x) \in \text{Domf}}\}$

$1 < x < 3 \quad \wedge \quad 6x - 3 \in \langle 2; 6]$

$2 < 6x - 3 \leq 6$

$\underbrace{1 < x < 3 \cap \frac{5}{6} < x \leq \frac{3}{2}}$

$1 < x \leq \frac{3}{2}$

Clave C

25. Primero hallamos dominio de (f + g)(x)

$\underbrace{\text{Domg}} \cap \underbrace{\text{Domf}}$

$4 - x^2 \geq 0$ $\qquad$ $\{-3; -2; -1; 0, 2; 3\}$
$4 \geq x^2$

$-2 \leq x \leq 2 \cap \{-3; -2; -1; 0; 2; 3\}$

$\Rightarrow \text{Dom}(f+g)(x) = \{-2; -1; 0; 2\}$

$\Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f+g)(-2) = f(-2) + g(-2) = 4 + 0 = 4$

$(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = 5 + \sqrt{3}$

$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 1 + 2 = 3$

$(f+g)(2) = f(2) + g(0) = 3 + 0 = 3$

$\Rightarrow$ Los elementos de $(f + g)(x)$:
$\{(-2; 4), (-1; 5 + \sqrt{3}), (0; 3), (2; 3)\}$
$(-3; \sqrt{5}) \notin (f+g)(x)$

Clave D

Resolución de problemas

26. Como f es función lineal: $f(x) = ax + b$, reemplazamos en el dato:

$a(2 + x) + b + a(x - 2) + b = x + 8$

$2ax + 2b = x + 8$

Por comparación:

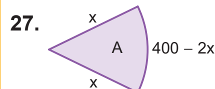
$2a = 1 \quad \wedge \quad 2b = 8$
$a = 1/2 \qquad b = 4$

$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{2} + 4$

Piden: $f(4) = \frac{4}{2} + 4 = 6$

Clave D

27.



$A(x) = \frac{(400 - 2x)x}{2}$

$A(x) = 200x - x^2$

Completando cuadrados:

$A(x) = -(x^2 - 200x + 100^2 - 100^2)$

$A(x) = 100^2 - (x - 100)^2$

Para que A(x) sea máxima:

$(x - 100)^2 = 0$ (mínimo)
$x = 100$ m

Clave B

Nivel 3 (página 91) Unidad 4

Comunicación matemática

28.

29.

30. $F(4) = 1$
$2F(2) = 3F(3)$ ...(I)
$F(x) = ax + b$ ...(I)
$x = 2 \Rightarrow F(2) = 2a + b$
$x = 3 \Rightarrow F(3) = 3a + b$

Reemplazando en (I):
$2(2a + b) = 3(3a + b)$
$b = -5a$
En (I): $x = 4$
$F(4) = 4a + b = 1$
$4a - 5a = 1 \Rightarrow a = -1$
$b = 5$
Reemplazando los valores de a y b en (I):
$F(x) = -x + 5$
Sea: $x = 2 \Rightarrow F(2) = 3$
Sea: $x = 8 \Rightarrow F(8) = -3$

Luego:
$\therefore F(2) + F(8) = 0$

Clave E

31. Dada la función:

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) = \sqrt{x^2+9} + 2; -4 \leq x \leq 2 \\ F_2(x) = -6; 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

De F_1: $-4 \leq x \leq 2$

Elevando al cuadrado:
$0 \leq x^2 \leq 16$

Sumando 9:
$9 \leq x^2 + 9 \leq 25$

Sacando raíz cuadrada:
$3 \leq \sqrt{x^2+9} \leq 5$

Sumando 2:
$5 \leq \underbrace{\sqrt{x^2+9} + 2}_{F_1(x)} \leq 7$

$\Rightarrow \text{Ran}(F_1) = [5; 7]$

De F_2: $2 < x \leq 3$

$\text{Ran}(F_2) = \{-6\}$

Luego:
$\text{Ran}(F) = \text{Ran}(F_1) \cup \text{Ran}(F_2)$
$\therefore \text{Ran}(F) = [5; 7] \cup \{-6\}$

Clave C

32. I. $f(x) \neq g(x)$

$\frac{x(x^2-1)}{x^2-1} = x$

$\text{Domf}(x) = \mathbb{R} - \{1; -1\}$ $\qquad$ $\text{Domg}(x) = \mathbb{R}$

Como los dominios son diferentes las funciones son diferentes. (F)

II. $\text{Dom } f(x) \cap \text{Domg} = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ (V)

III. $\text{Rang} - \text{Ranf} = \{-1; 1\}$ (V)

Clave C

33. Para sumar dos funciones intersecamos dominios:

$\text{DomF} \cap \text{DomG} = \{\sqrt[3]{3}; 4; 1\}$

$\Rightarrow \text{Dom } F^3 = \{\underbrace{\sqrt[3]{3}}_{Q'}; \underbrace{4; 1}_{Q}\}$

$\Rightarrow F(\sqrt[3]{3}) = -\sqrt[3]{3}$

$F(4) = 4$ $\qquad$ $G(\sqrt[3]{3}) = 6$

$F(1) = 1$ $\qquad$ $G(4) = 1$

al cubo $\qquad$ $G(1) = 7$

$F^3(\sqrt[3]{3}) = -3$
$F^3(4) = 4^3$
$F^3(1) = 1^3$

$\Rightarrow F^3 + G = \{(\sqrt[3]{3}; -3 + 6); (4; 4^3 + 1), (1; 1 + 7)\}$

$F^3 + G = \{(\sqrt[3]{3}; 3), (4; 65), (1; 8)\}$

Piden: $3 + 65 + 8 = 76$

Clave D

34. Función periódica: $F(x + 7) = F(x)$; $T = 7$

$\Rightarrow$ $F(10) = F(7 + 3) = F(3) = 8$

$\Rightarrow$ $F(17) = F(2T + 3) = F(3) = 8$
↑
14 (múltiplo de periodo)

$\Rightarrow$ $F(19) = F(2T + 5) = F(5) = 4$
$F(10) + F(17) + F(19) = 8 + 8 + 4 = 20$

Clave B

35. Como f(x) es suryectiva Ranf = B

$y = \dfrac{x+3}{x-3}$

$y = \dfrac{x-3+6}{x-3} \Rightarrow y = 1 + \dfrac{6}{x-3}$

Dado: $Domf(x) = \langle 3; 6\rangle$

$\Rightarrow$ Formamos "y" del dominio:

$3 < x < 6$

$0 < x - 3 < 3$

$\dfrac{1}{3} < \dfrac{x}{x-3}$

Multiplicamos por 6:

$2 < \dfrac{6}{x-3}$

$3 < \underbrace{\dfrac{6}{x-3} + 1}_{3 < y}$

$\Rightarrow y \in \langle 3; +\infty\rangle$

Clave C

36. Graficamos f(x):

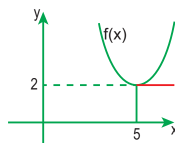
$f(x) = x^2 - 10x + 27$

Completando cuadrados:

$f(x) = (x - 5)^2 + 2$

$y - 2 = 1(x - 5)^2$

↓ ↓ ↓
k a h



Se observa que f es inyectiva para:

$x \leq 5 \vee x \geq 5$

$\Rightarrow x \in [m; +\infty] \Rightarrow$ m mínimo = 5

Clave C

37. Veamos si existe la inversa, en $x \geq 2$:

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

$x_1^2 - 4x_1 + 6 = x_2^2 - 4x_2 + 6$

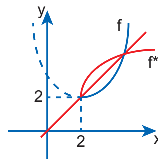
$(x_1 - 2)^2 + 2 = (x_2 - 2)^2 + 2$

Como $x \geq 2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Graficamos: $y = x^2 - 4x + 6$

$y = (x - 2)^2 + 2$

$y - 2 = (x - 2)^2$; $\forall x \geq 2$

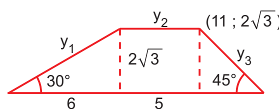


Clave B

38. $x \in [0; 6]$; $y_1 = \text{tg } 30° \, x$

$x \in [6; 11]$; $y_2 = 2\sqrt{3}$

$x \in [11; 11 + 2\sqrt{3}]$; $y_3 = \tan 135° \, x + b$



$y_3 = -x + b$

$(11; 2\sqrt{3}) \in (y_3 = -x + b)$

$\Rightarrow 2\sqrt{3} = -11 + b$

$b = 2\sqrt{3} + 11$

$\Rightarrow y_3 = -x + 11 + 2\sqrt{3}$

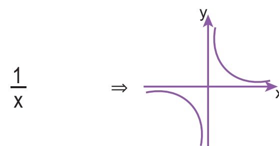
Clave D

39. $y = \dfrac{|x| - 1 + 2}{|x| - 1}$

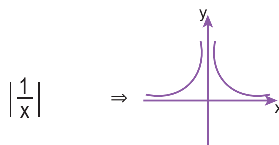
$y = 1 + \dfrac{2}{|x| - 1}$

Graficamos:

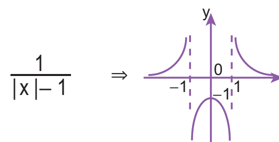
$\dfrac{1}{x} \Rightarrow$



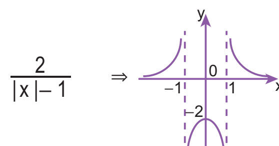
$\left|\dfrac{1}{x}\right| \Rightarrow$



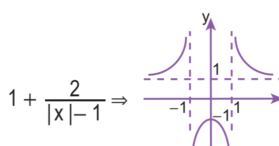
$\dfrac{1}{|x| - 1} \Rightarrow$



$\dfrac{2}{|x| - 1} \Rightarrow$



$1 + \dfrac{2}{|x| - 1} \Rightarrow$



Clave B

40. $h(t) = 2(10t - t^2)$

$h(t) = -2(\underbrace{t^2 - 10t + 25}_{(t-5)^2} - 25)$

$h(t) = -2(t - 5)^2 + 50$

$\Rightarrow$ h(t) es máximo cuando:

$50 - \underbrace{2(t - 5)^2}_{0}$ es máximo

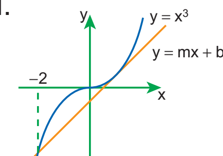
$h(t)_{máx.} = 50$ m, en un tiempo de:

$t - 5 = 0$

$t = 5$

Clave D

41.



Como las funciones x^3 y $mx + b$ se cortan:

$\Rightarrow \underbrace{x^3 = mx + b}_{x^3 - mx - b = 0}$ (tiene 3 raíces) ...(I)

Observamos 2 puntos de corte.

1 punto tiene 2 raíces iguales.

Se tiene una raíz

$\Rightarrow -2 + \underbrace{x_2 + x_3}_{\text{son iguales}}\}$ 3 raices

De (I) Σ raíces = 0

$\Rightarrow x_2 + x_3 = 2$

Por análisis $x_2 = x_3 = 1$

$\Rightarrow$ En (I): $1 - m(1) - b = 0$ ...(α)

Se observa también:

$-2 \in y = \mathbf{mx + b}$ y a $\underbrace{\mathbf{x^3}}_{-8}$

$\Rightarrow -8 = m(-2) + b$ ... (β)

Restamos (α) y (β):

$b + m = 1$
$b - 2m = -8$ (–)

$3m = 9$
$m = 3$ en β $b = -2$

$\therefore m - b = 3 - (-2) = 5$

Clave A

APLIQUEMOS LO APRENDIDO (página 93) Unidad 4

1. $\lim\limits_{x \to 2} (3x^3 - 2x^2 + 5x - 7)$

$= (3(2)^3 - 2(2)^2 + 5(2) - 7)$

$= (24 - 8 + 10 - 7) = 19$

Clave B

2. $\dfrac{(x+2)(x^2 - 3x + 5)}{(x+2)(x+1)} = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x+1}$

Luego: $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}$

Por propiedad:

$= \dfrac{\left[\lim\limits_{x \to -2} x\right]^2 - 3\left[\lim\limits_{x \to -2} x\right] + \lim\limits_{x \to -2} 5}{\lim\limits_{x \to -2} x + \lim\limits_{x \to -2} 1}$

$= \dfrac{(-2)^2 - 3(-2) + 5}{-2 + 1} = -15$

$\therefore \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2} = -15$

Clave B

3. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x^2 + 3x + 3^2)}{(x+3)(x-3)}$

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x^2 + 3x + 9)}{x + 3} = \dfrac{3^2 + 3.3 + 9}{6} = \dfrac{9}{2}$

Clave E

4. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(\sqrt{x+6} - 3)(\sqrt{x+6} + 3)(\sqrt{x+1} + 2)}{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)(\sqrt{x+6} + 3)}$

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)}{(x-3)} \times \dfrac{(\sqrt{x+1} + 2)}{(\sqrt{x+6} + 3)} = \dfrac{2+2}{3+3} = \dfrac{4}{6}$

Clave C

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + 4}{x - 2} = \dfrac{\infty}{\infty}$

Luego:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\left(3 + \dfrac{4}{x}\right)}{x\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)} = \dfrac{3}{1} = 3$

Clave B

6. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\left(\sqrt{x-4} - \sqrt{3x-14}\right)\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{3x-14}\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{3x-14}\right)}$

$\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{-2(x-5)}{(x-5)\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{3x-14}\right)}$

$\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{-2}{\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{3x-14}\right)} = \dfrac{-2}{1+1}$

$\therefore \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x-4} - \sqrt{3x-14}}{x-5} = -1$

Clave C

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{x^3}\right)}{x^3}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{x^3}\right) = 0$

$\therefore \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 5}{x^3} = 0$

Clave C

8. Los límites al infinito se resuelven de la siguiente manera:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{3 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{5}{x^2}}$

$\dfrac{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(7 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(3 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{5}{x^2}\right)}$

$= \dfrac{7 - 0 + 0}{3 + 0 + 0} = \dfrac{7}{3}$

Clave D

9. Si $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ existe, entonces:

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$

Luego: $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} (3x + 2) = 14$ ...(1)

$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} (5x + A) = 20 + A$ ...(2)

Igualando (1) y (2): $20 + A = 14 \quad \therefore A = -6$

Clave C

10. Por límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{|x+2|}{x+2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+2}{x+2} = \lim\limits_{x \to 2^+} 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{|x+2|}{x+2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+2}{x+2} = 1$

Como $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x+2|}{x+2} = 1$

Clave B

11. Sea:

$P = \lim\limits_{x \to b} \dfrac{(x-b)(x^2 + bx + b^2)}{(\sqrt{x} - \sqrt{b})}$

$P = \lim\limits_{x \to b} \dfrac{(\sqrt{x} - \sqrt{b})(\sqrt{x} + \sqrt{b})(x^2 + bx + b^2)}{(\sqrt{x} - \sqrt{b})}$

$\Rightarrow P = \lim\limits_{x \to b} (\sqrt{x} + \sqrt{b})(x^2 + bx + b^2)$

$\Rightarrow P = (\sqrt{b} + \sqrt{b})(b^2 + b^2 + b^2)$

$\therefore P = 2\sqrt{b}(3b^2) = 6\sqrt{b^5}$

Clave E

12. $S = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{2x^4 + x + 1}$

Como el grado del dividendo es menor que el grado del divisor, entonces:

$S = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2x + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)} = 0$

Clave C

13. Sea $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$

$f(x) = \dfrac{\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}\right)}$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}\right)}$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{\sqrt{x}^2 + \sqrt{x}}}{\left(\sqrt{\sqrt{x}^2 + \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}} + \sqrt{x}\right)}$

Factorizando:

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\left[\sqrt{1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}}\right]}{\sqrt{x}\left[\sqrt{1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}}} + 1\right]}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{1} + 1} = \dfrac{1}{2}$

Clave C

14. Al evaluar el límite, es de la forma 1^∞.

$\Rightarrow$ Usamos:

$\lim\limits_{x \to \infty} F(x)^{G(x)} = e^{\lim\limits_{x \to \infty}(F(x) - 1)G(x)}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x - 4}{3x + 2}\right)^{\frac{x+1}{2}} = e^{\lim\limits_{x \to \infty}\left[\left(\frac{3x-4}{3x+2} - 1\right)\frac{x+1}{2}\right]}$

$= e^{\lim\limits_{x \to \infty}\left[-\frac{6}{3x+2}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]}$

$= e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-3x-3}{3x+2}}$

$= e^{-1}$

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 95) Unidad 4

Comunicación matemática

1.

x 1	0,85	0,82	0,89	0,95	0,99	1
$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$	7,85	7,82	7,89	7,95	7,99	8

I. 8
II. Izquierda
III. 1

2.

Razonamiento y demostración

3. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} + 2}{x - 3} = \dfrac{\sqrt{4} + 2}{4 - 3} = 4$

Clave B

4. $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}$

$= \lim\limits_{x \to -5} \dfrac{(x+5)(x-5)}{(x+5)}$

$= -10$

Clave A

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x+2)^2(2x-8)^3}{7x^5 - 4x^3 + 2}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{8(9x^2 + 12x + 4)(x-4)^3}{7x^5 - 4x^3 + 2}$

$$= 8 \times \lim_{x \to +\infty} \frac{(9x^2 + 12x + 4)(x^3 - 12x^2 + 48x - 64)}{7x^5 - 4x^3 + 2}$$

Como el grado del dividendo es igual al grado del divisor, entonces:

$$= 8 \times \lim_{x \to +\infty} \frac{(9x^5 + ...)}{7x^5 - 4x^3 + 2}$$

$$= 8 \times \frac{9}{7} = \frac{72}{7}$$

Clave A

6. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}$

$= \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2$

Clave B

7. $S = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2x^4 + x + 1}$

Como el grado del dividendo es menor que el grado del divisor, entonces:

$$S = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} = 0$$

Clave C

8. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x + 1} = \frac{0}{0}$

Luego:

$$\lim_{x \to -1} \frac{(\sqrt{x+5} - 2)(\sqrt{x+5} + 2)}{(x+1)(\sqrt{x+5} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x + 1}{(x+1)(\sqrt{x+5} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{1}{\sqrt{x+5} + 2}$$

$$= \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

Clave E

Resolución de problemas

9. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^{100} - 1}{x^{50} - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x^{50} + 1)(x^{50} - 1)}{x^{50} - 1}$

$= 1 + 1 = 2$

Clave B

10. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}} = \frac{0}{0}$

Luego:

$$\lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{2x+1} - 3)(\sqrt{2x+1} + 3)(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x-2} - \sqrt{2})(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})(\sqrt{2x+1} + 3)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \left\{ \frac{2(x-4)(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})}{(x-4)(\sqrt{2x+1} + 3)} \right\}$$

$$= \frac{2(2\sqrt{2})}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{a}}{b} \quad ...(\text{Dato})$$

Identificando:
$a = 2 \wedge b = 3$
Nos piden:
$b^a = 3^2 = 9$

Clave B

Nivel 2 (página 95) Unidad 4

Comunicación matemática

11. (I) Sea: $f(x) = \frac{|x|}{x}$

- Si: $x > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{x} = 1$
- Si: $x < 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{x}{x} = -1$

Luego: $f(x) = \begin{cases} -1; x < 0 \\ 1; x > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$ ...(F)

(II) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^3 + 27}{x + 3} = \frac{0}{0}$

$\lim\limits_{x \to -3} \frac{(x+3)(x^2 - 3x + 9)}{x + 3} = \lim\limits_{x \to -3} (x^2 - 3x + 9)$

$= 9 + 9 + 9$

$= 27$ ...(V)

(III)

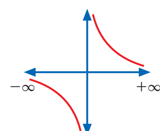
$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{0}{0}$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x - 2}{x - 3} = \frac{-1}{-2}$

$= \frac{1}{2}$ ...(V)

(IV) Sea: $f(x) = \frac{1}{x}$

Cuya gráfica es:



De donde: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ...(V)

(V) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$; sea $f(x) = \frac{|x|}{x}$

- Si $x > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{x} = 1$
- Si $x < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-x}{x} = -1$

Así: $f(x) = \begin{cases} -1; x < 0 \\ 1; x > 0 \end{cases}$

Como:
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

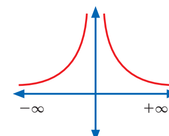
$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ...(F)

(VI) Sea $f(x) = \frac{1}{|x|}$

- Si $x > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$
- Si $x < 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x}$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}; x > 0 \\ -\frac{1}{x}; x < 0 \end{cases}$

Cuya gráfica es:



De donde: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ ...(V)

Clave C

12. $\frac{\lim (x-1)(x^2 + x + 1)}{ax^3 + x^2 + bx + 2}$

Aplicando Ruffini en el denominador:

	a	1	b	2
1		a	a + 1	a + b + 1
	a	a + 1	a + b + 1	0

$2 + a + b + 1 = 0$
$\therefore a + b = -3$

Razonamiento y demostración

13. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \frac{3x - 1}{9x^2 - 1}$

$= \lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \frac{(3x - 1)}{(3x + 1)(3x - 1)} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \frac{1}{3x + 1} = \frac{1}{2}$

Clave B

14. Sea: $A = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}$

$$A = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x^2 + 3} - 2)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)}$$

$$A = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)}$$

$$A = \lim_{x \to 1} \frac{x + 1}{(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \frac{2}{2 + 2}$$

$\therefore A = \frac{1}{2}$

Clave E

15. Como es el caso $\frac{\infty}{\infty}$, dividimos numerador y denominador entre $\sqrt[5]{x}$.

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\sqrt[5]{2 + 3x} + 3}{\sqrt[5]{x}}}{\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x}}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[5]{\frac{2}{x} + \frac{3x}{x}} + \frac{3}{\sqrt[5]{x}}}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[5]{3} + 0}{1} = \sqrt[5]{3}$$

Clave E

16. Estamos en el caso de indeterminación 1.

Usamos $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

Ordenamos adecuadamente:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}\cdot a}$$

Por propiedad:

$\text{lím } f(x)^{a}=(\text{lím} f(x))^{a}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}\cdot a}$$

$$=\left(\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}}}_{e}\right)^{a}=e^{a}$$

Clave D

17. Los límites al infinito se resuelven de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}{7+\frac{8}{x}+\frac{5}{x^2}}$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(7+\frac{8}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{3-0+0}{7+0+0}=\frac{3}{7}$$

Clave E

18. Como $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ existe, entonces:

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^-}f(x)$$

$$\lim_{x\to 3^+}(3x+A)=\lim_{x\to 3^-}(2x+5)$$

$$3(3)+A=2(3)+5$$

$$9+A=6+5 \Rightarrow A=2$$

Como $\lim\limits_{x\to 5}f(x)$ existe, entonces:

$$\lim_{x\to 5^-}f(x)=\lim_{x\to 5^+}f(x)$$

$$\lim_{x\to 5^-}(3x+A)=\lim_{x\to 5^+}(x+2B)$$

$$3(5)+A=5+2B$$

$$15+2=5+2B$$

$$\Rightarrow B=6$$

$$\therefore A+B=8$$

Clave C

Resolución de problemas

19. Sea: $f(x)=mx^2+nx+\dfrac{3x^4+1}{x^2+3x-1}$

Hallando: $\dfrac{3x^4+1}{x^2+3x-1}$ por Horner.

1	3	0	0	0	1
–3		–9	3		
1			27	–9	
				–90	30
	3	–9	30	–99	31

$$\Rightarrow f(x)=mx^2+nx+3x^2-9x+30+\frac{(-99x+31)}{x^2+3x-1}$$

$$\Rightarrow f(x)=(m+3)x^2+(n-9)x+30-\frac{99x-31}{x^2+3x-1}$$

Por dato:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=30$$

Es decir:

$$\lim_{x\to\infty}\left[(m+3)x^2+(n-9)x+30-\frac{99x-31}{x^2+3x-1}\right]=30$$

$$\Rightarrow m+3=0 \wedge n-9=0$$

$$m=-3 \qquad n=9$$

Clave E

Nivel 3 (página 96) Unidad 4

Comunicación matemática

20.

21. A) **F**

$$\lim_{x\to\infty}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to\infty}f(x)^{\lim\limits_{x\to\infty}g(x)}$$

Evaluamos: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x+1}{x-1}}=1$

B) **F**

$$x\to 2^- \Rightarrow x<2$$

$$x-2<0 \quad \Rightarrow |x-2|=-(x-2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x-2}$$

C) **V** (Propiedad de límites)

D) F

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+3}}{-x}}{\frac{x+4}{-x}}=\frac{\sqrt{\frac{x^2}{(-x)^2}+\frac{3}{(-x)^2}}}{-1+\frac{4}{-x}}$$

$$=\frac{1}{-1}=-1$$

E) **V** (Por definición)

Razonamiento y demostración

22. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^3-a^3)}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}(3a^2)(2\sqrt{a})=6a^2\sqrt{a}$$

Clave B

23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[8]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=\dfrac{0}{0}$

Luego:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[8]{x}-1)(\sqrt[8]{x}^{7}+\sqrt[8]{x}^{6}+...+1)(\sqrt[5]{x}^{4}+\sqrt[5]{x}^{3}+...+1)}{(\sqrt[5]{x}-1)(\sqrt[5]{x}^{4}+\sqrt[5]{x}^{3}...+1)(\sqrt[8]{x}^{7}+\sqrt[8]{x}^{6}+...+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt[5]{x}^{4}+\sqrt[5]{x}^{3}+...+1)}{(x-1)(\sqrt[8]{x}^{7}+\sqrt[8]{x}^{6}+...+1}$$

$$=\frac{\overbrace{1+1+...+1}^{5\ \text{veces}}}{\underbrace{1+1+...+1}_{8\ \text{veces}}}=\frac{5}{8}$$

Clave D

24. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)(\sqrt{x-4}+\sqrt{3x-14})}{(\sqrt{x-4}-\sqrt{3x-14})(\sqrt{x-4}+\sqrt{3x-14})}$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(\sqrt{x-4}+\sqrt{3x-14})}{-2(x-5)}$$

$$=\frac{1+1}{-2}=-1$$

Clave B

25. Estamos en la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Se observa que el numerador y denominador son polinomios de grado 7.

Dividimos ambos entre x^7.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(x+4)^4\cdot(3x+2)^3}{x^4\cdot x^3}}{\frac{x^7-x^3}{x^7}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{x}+\frac{4}{x}\right)^4\left(\frac{3x}{x}+\frac{2}{x}\right)^3}{\frac{x^7}{x^7}-\frac{3}{x^7}}=\frac{1^4\cdot 3^3}{1}=27$$

Clave D

26. Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Dividimos al numerador y denominador entre $\sqrt{3x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{3x+\sqrt{3x+\sqrt{3x}}}}{\sqrt{3x}}}{\frac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{3x+\sqrt{3x}}}{3x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{3x}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{3x}+\frac{\sqrt{3x}}{(3x)^2}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{3x}}}=\frac{1}{1}=1$$

Clave A

Resolución de problemas

27. Sea $f(x) = ax^2 - bx + c - \dfrac{x^5 + 2x^4 - 5}{x^3 - 1}$

Reducimos: $\dfrac{x^5 + 2x^4 - 5}{x^3 - 1}$ por Horner.

1	1	2	0	0	0	–5
0		0	0	1		
0			0	0	2	
1				0	0	0
	1	2	0	1	2	–5

Entonces:

$$\frac{x^5 + 2x^4 - 5}{x^3 - 1} = x^2 + 2x + \frac{x^2 + 2x - 5}{x^3 - 1}$$

Luego:

$$f(x) = ax^2 - bx + c - \left(x^2 + 2x + \frac{x^2 + 2x - 5}{x^3 - 1}\right)$$

$$f(x) = (a - 1)x^2 - (b + 2)x + c - \frac{x^2 + 2x - 5}{x^3 - 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty}\left[(a - 1)x^2 - (b + 2)x + c - \frac{x^2 + 2x - 5}{x^3 - 1}\right] = 0$$

Analizando:

$a - 1 = 0$; $\quad b + 2 = 0$; $\quad c - 1 = 0$

$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 1$

Nos piden:

$a + b + c = 1 + (-2) + 1 = 0$

Clave A

28.

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{3x + a}{x + 3}; & -3 < x < -2 \\ a + b - 10\ ; & x = -2 \\ \sqrt{x + 3} - 5\ ; & x > -2 \end{cases}$$

Como existe el límite cuando $x \to -2$

$$\lim_{x \to -2^-} F(x) = \lim_{x \to -2^+} F(x)$$

$$\frac{3(-2) + a}{-2 + 3} = \sqrt{-2 + 3} - 5$$

$a - 6 = -4$

$\Rightarrow a = 2$

También:

$$\lim_{x \to -2^+} F(x) = \lim_{x \to -2} F(x)$$

$-4 = a + b - 10$

$\Rightarrow a + b = 6$

Como $a = 2 \Rightarrow b = 4$

Nos piden:

$ab = (2)(4) = 8$

Clave D

29. $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{x + 2}{x - 2}\right)^x = 1^\infty$

$$e^{\lim\limits_{x \to \infty}\left[\frac{x+2}{x-2} + 1\right]x} = e^{\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{2x}{x-2}\right)x}$$

$$= e^2 = e^m$$

$\therefore m = 2$

Clave C

30. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

$\Rightarrow -a + b = a^2 + b$

$a = -1$

De $f(1) = 7$

$\Rightarrow 3(1)^2 - (-1) + b = 7$

$\Rightarrow b = 3$

$\therefore a = -1$ y $b = 4$

Clave D

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 100) Unidad 4

Comunicación matemática

1.

$(\sqrt[4]{x^{13}})^1 = \frac{13}{4}x^{13/4-1} = \frac{13}{4}x^{9/4}$
$\cos(3x+1)' = -\text{sen}(3x+1)\,(3x+1)'$ $= -3\text{sen}(3x+1)$
$(2^x)' = 2^x \ln 2$ (teorema)
$\text{Log}(2x+6)' = \frac{(2x+6)'}{2x+6}\,\text{loge} = \frac{2\,\text{loge}}{2x+6}$
$3\ln(x^2)' = \frac{3}{x^2}(x^2)' = \frac{3\times 2x}{x^2} = \frac{6}{x}$

2. Usamos los teoremas:

F(x)	$\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$	n
x^{n-5}	$(n-5)(x)^{n-6} = x°(n-5)$	n = 6
$3x^n$	$3nx^{n-1} = 3nx^7$ $n-1=7$	n = 8
$x^3 + 1/x^3 + 3x$	$3x^2 - 3x^{-4} + 3$ $\Rightarrow n = -4$	n = –4
sen(nx)	$n\cos\frac{7x}{2} \Rightarrow n = \frac{7}{2}$	n = 3,5
$\frac{1}{\sqrt{x+2}}$	$\frac{-1}{2}(x+2)^n = \frac{-1}{2}(x+2)^{-\frac{3}{2}}$	n = –1,5
$\sqrt{3+x}$	$\frac{1}{2(3+x)^n} = \frac{1}{2(3+x)^{-1/2}}$	n = –0, 5

Razonamiento y demostración

3. $F(x) = x^3 - 3x + 1000$

$F'(x) = 3x^2 - 3$

4. $f(x) = \frac{1}{(3x)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{x}} = \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{3}}.x^{-1/2-1} = \frac{-1}{2\sqrt{3}\sqrt{x^3}}$

$= \frac{-1}{2x\sqrt{3x}}$

Clave B

5. $P(x) = 4x^2\cos x$

$P'(x) = 8x\cos x + 4x^2(-\text{sen}x)$

$P'(x) = 8x\cos x - 4x^2\text{sen}x$

$P'(x) = 4x(2\cos x - x\text{sen}x)$

Clave E

6. Si: $f(x) = 3x^2 + 6x^3 + 7x^6$

Derivando:

$f'(x) = 6x + 18x^2 + 42x^5$

Clave E

7. Derivando por el teorema de cociente:

$f'(x) = \frac{-x-(2-x)}{x^2} = \frac{-2}{x^2}$

Clave A

8. Si:

$f(x) = 8x^5 - 2x^3 - 1$

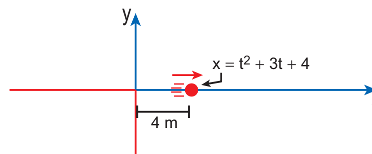
$\Rightarrow f'(x) = 40x^4 - 6x^2$

$x = 1 \Rightarrow f'(1) = 40 - 6 = 34$

Clave D

Resolución de problemas

9.



En el instante $t = 0 \Rightarrow x = 4$ m

En el instante $t = 12$

$x = 144 + 36 + 4 = 184$ m

$\Rightarrow$ Recorre: $184 - 4 = 180$ m

Para hallar la velocidad $\frac{dx}{dt} = 2t + 3$

$V = 2t + 3$ en el instante $t = 12$

$V = 12(2) + 3 = 27$ m/s

Clave B

10. Sabemos que $\frac{df}{dx}$ es un máximo o un mínimo

$u''(x) = -2 < 0 \Rightarrow$ es un máximo

$\frac{du(x)}{dx} = 200 - 4x = 0$

$x = 50$

$\Rightarrow$ Debe vender 50 electrodomésticos y la Utilidad $U(50) = 200(50) - 2(50)^2$

Utilidad = S/5000

Clave C

Nivel 2 (página 100) Unidad 4

Comunicación matemática

11. 1. (V) Definición

2. (V) $y' = \frac{7}{2}x^2 + 4 \Rightarrow y'' = 7x$

3. (F) $f(x) = \frac{\text{senx}}{x}$

Aplicamos teorema de la división de un cociente.

$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x.x - \text{senx}}{x^2}$

$f'(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\text{senx}}{x^2}$

4. (V) Tiene un mínimo $y = 3x^2 - 3x + 2$

$y'' = 6 > 0$

$y' = 6x = 3 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

5. (V) $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ es la segunda derivada

$\Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = -\text{senx}$

$\Rightarrow \frac{d^2f(x)}{dx^2} = -\cos x$

12. Para el rectángulo:

$A(x) = x(80 - x)$ (x; 80 – x)

$A(x) = 80x - x^2$

Maximizamos:

$\frac{dA(x)}{dx} = 80 - 2x = 0$

$\Rightarrow x = 40$ cm.

Para el triángulo isósceles:

$A(x) = \frac{1}{2}(80 - 2x)h$ ...(I) (h; x; 80 – 2x; 40 – x)

h (por Pitágoras)

$(40 - x)^2 + h^2 = x^2$

$h = \sqrt{x^2 - (40-x)^2}$

$h = \sqrt{80x - 40^2}$

$h = \sqrt{80}(\sqrt{x - 20})$

En (I):

$A(x) = \frac{1}{2}(80 - 2x)\underbrace{\sqrt{80}}_{4\sqrt{5}}(\sqrt{x-20})$

$A(x) = 2\sqrt{5}(80 - 2x)(\sqrt{x-20})$

Maximizamos:

$\frac{dA(x)}{d(x)} = 2\sqrt{5}\underbrace{\left[-2(\sqrt{x-20}) + \frac{1}{2\sqrt{x-20}}(80-2x)\right]}_{0} = 0$

$\frac{80-2x}{2\sqrt{x-20}} = 2\sqrt{x-20}$

$80 - 2x = 4(x - 20)$

$160 = 6x$

$\Rightarrow x = \frac{80}{3}$ cm

Razonamiento y demostración

13. Si:

$f(x) = \sqrt{1+5x}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{1+5x}}$

$x = 7 \Rightarrow f'(7) = \frac{5}{2\sqrt{1+35}} = \frac{5}{12}$

Clave C

14. $f(x) = x\sqrt{a^2+x^2}$; $a > 0$

$f'(x) = \sqrt{a^2+x^2} + x[\sqrt{a^2+x^2}]'$

$f'(x) = \sqrt{a^2+x^2} + x[(a^2+x^2)^{1/2}]'$

$f'(x) = \sqrt{a^2+x^2} + x\left[\frac{1}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(a^2+x^2)\right]$

$f'(x) = \sqrt{a^2+x^2} + \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{1/2}}$

$f'(x) = \frac{a^2+x^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$f'(a) = \frac{3a^2}{\sqrt{2a^2}} = \frac{3a^2}{a\sqrt{2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$

Clave B

15. $f(x+3) = x^5$

Haciendo $x + 3 = y$

$x = y - 3$

Reemplazando:

$f(y) = (y-3)^5$

Luego: $y \to x$

$f(x) = (x-3)^5$

$f'(x) = 5(x-3)^4$

Clave B

16. Si: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$; $ad - bc \neq 0$

Derivando:

$f'(x) = \frac{acx + ad - c(ax+b)}{(cx+d)^2}$

$f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Nos piden:

$S = f'(x) - \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} = 0$

Clave A

17. Si:

$f(x) = \tan(2x) - \tan x$

Recuerda:

$d(\tan x) = \sec^2 x dx$

Luego:

$f'(x) = 2\sec^2(2x) - \sec^2 x$

$x = 0 \Rightarrow f'(0) = 2 - 1 = 1$

Clave B

18. $f'(x) = [D_x(|x| - x)].\sqrt[3]{9x} + (|x| - x).\, D_x\sqrt[3]{9x}$

$f'(x) = \left(\frac{x}{|x|} - 1\right).\sqrt[3]{9x} + (|x| - x)\frac{1}{3}.(9x)^{\frac{-2}{3}}.9$

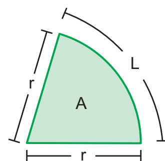
$f'(-3) = (-1-1)(-3) + (3+3).\frac{1}{3}(-27)^{-\frac{2}{3}}.9$

$\therefore f'(-3) = 8$

Clave C

Resolución de problemas

19. Del enunciado:



Dato:

$2r + L = 100 \Rightarrow L = 100 - 2r$

Sabemos que:

$A = \frac{Lr}{2}$

Reemplazando:

$A(r) = \frac{(100-2r)r}{2}$

$A(r) = 50r - r^2$

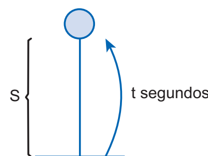
Maximizando:

$A'(r) = 50 - 2r = 0$

$\therefore$ r = 25 pies

Clave D

20.



$S(t) = 81t - 9t^2$

Maximizando:

$S'(t) = 81 - 18t = 0$ $\quad$ $S''(t) = -18 < 0$

$18t = 81$ $\quad$ $\Rightarrow$ existe un máximo

$t = \frac{9}{2}$

Luego:

$S_{máx.} = 81.\frac{9}{2} - 9\left(\frac{9}{2}\right)^2$

$S_{máx.} = 182{,}25$ pies

Clave A

Nivel 3 (página 101) Unidad 4

Comunicación matemática

21. A) Por definición L_T:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\frac{6^2}{4} + 6 \quad \frac{2}{4}(x_0) + 1 \quad 6$

$m = \frac{2}{4}.6 + 1 = 4$ (pendiente)

$\Rightarrow L_T$: $y - 15 = 4(x - 6)$

$\therefore$ L_T: $y - 4x + 9 = 0$

B) De la definición

$L_T = y - f(x_0) = f'(x_0)\ (x - x_0)$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\text{sen}\left(\frac{\frac{5\pi}{3}}{2}\right) \quad \frac{1}{2}\cos\frac{x_0}{2} \quad \frac{5\pi}{3}$

$\Rightarrow L_T = y - \text{sen}x\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\cos\frac{5\pi}{6}\left(x - \frac{5\pi}{3}\right)$

$y - \text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{5\pi}{3}\right)$

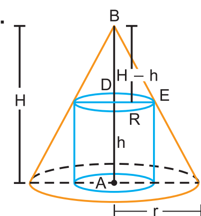
$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{5\pi}{3}\right)$

$y - \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{5\pi}{3}\right)$

$4y - 2 = -\sqrt{3}x + \frac{5\pi\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$ L_T: $4y + \sqrt{3}x - 2 - 5\pi\frac{\sqrt{3}}{3} = 0$

22.



Se sabe:

$V_{cilindro} = \pi R^2 h \quad ...(\alpha)$

$\triangle ABC \sim \triangle DBE$

$\frac{r}{R} = \frac{H}{H-h} \Rightarrow h = \frac{H(r-R)}{r}$

Reemplazando en (α):

$V_{cilindro} = \pi R^2\left(\frac{H(r-R)}{r}\right)$

$= \frac{\pi H}{r}R^2(r - R)$

$= \pi HR^2 - \frac{\pi HR^3}{r}$

Maximizando:

$V' = 2\pi HR - \frac{3\pi HR^2}{r} = 0$

$\Rightarrow 2\pi HR = \frac{3\pi HR^2}{r}$

$\therefore R = \frac{2}{3}r$

Clave B

Razonamiento y demostración

23. Recordar: $e^{\ln a} = a$

En el problema:

$e^{\ln(\arctan x^{1/3})} = \arctan x^{1/3}$

Entonces:

$f(x) = \tan\left(e^{\ln(\arctan x^{1/3})}\right)$

$= \tan(\arctan x^{1/3}) = x^{1/3}$

Luego: $f'(x) = \frac{x^{-2/3}}{3}$

Clave D

24. Sea la función:

$f(x) = \ln(x + 5)$

Recuerda: Si: $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Luego:

$f'(x) = \dfrac{1}{x + 5}$

Clave A

25. Sea la función:

$f(x) = \text{sen}(\cos x)$

Derivando:

$f'(x) = [\cos(\cos x)][-\text{sen}x]$

$f'(x) = -\text{sen}x \, . \, \cos(\cos x)$

Clave E

26. Dato:

$y = A\text{sen}3x + B\cos 3x$

Derivando:

$y' = A\cos 3x(3) + B(-\text{sen}3x)(3)$

$y' = 3A\cos 3x - 3B\text{sen}3x \quad ...(I)$

Derivando:

$y'' = 3A(-\text{sen}3x)(3) - 3B(\cos 3x)(3)$

$y'' = -9A\text{sen}3x - 9B\cos 3x \quad ...(II)$

Dato:

$y'' + 4y' + 3y = 10\cos 3x \quad ...(\alpha)$

(I) y (II) en (α):

$-9A\text{sen}3x - 9B\cos 3x + 4(3A\cos 3x - 3B\text{sen}3x)$

$+ 3(A\text{sen}3x + B\cos 3x) = 10\cos 3x$

Reduciendo:

$-(12B + 6A)\text{sen}3x + (12A - 6B)\cos 3x = 10\cos 3x$

Identificando:

$12B + 6A = 0$

$12A - 6B = 10$

Resolviendo:

$A = \dfrac{2}{3}, B = -\dfrac{1}{3}$

Nos piden:

$A - B = \dfrac{2}{3} - \left(-\dfrac{1}{3}\right) = 1$

Clave B

27. La curva es $y = x^4 - 2x^2 + x$

$\Rightarrow$ la tangente a la curva es la derivada

$\Rightarrow$ $M_T = y' = 3x^3 - 4x + 1$ en el punto (2; 10)

$M_T = y' = 4(2)^3 - 4(2) + 1 = 25$

$\Rightarrow$ la ecuación de la tangente en el punto (2; 10)

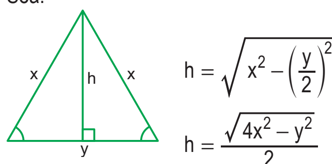
$y - 10 = 25(x - 2)$

$y = 25x - 40$

Clave E

Resolución de problemas

28. Sea:



$h = \sqrt{x^2 - \left(\dfrac{y}{2}\right)^2}$

$h = \dfrac{\sqrt{4x^2 - y^2}}{2}$

Sea el perímetro:

$2x + y = 18$

$y = 18 - 2x \quad ...(I)$

Sabemos que:

$h = \dfrac{\sqrt{4x^2 - (18 - 2x)^2}}{2}$

$h = 3\sqrt{2x - 9} \quad ...(II)$

Luego:

$A = \dfrac{1}{2}yh \quad ...(III)$

(I) $\wedge$ (II) en (III):

$A(x) = \dfrac{1}{2}(18 - 2x) \, . \, 3\sqrt{2x - 9}$

$A(x) = 3(9 - x)\sqrt{2x - 9}$

Maximizando:

$A'(x) = \dfrac{(9 - x)}{\sqrt{2x - 9}} - \sqrt{2x - 9} = 0$

$9 - x = 2x - 9 \Rightarrow x = 6$

En (I):

$y = 18 - 2(6) = 6$

Observación:

$x = y = 6$ (triángulo equilátero)

Nos piden:

$A = \dfrac{L^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

Clave C

29. Sean x e y los números.

Dato:

$x + y = n$

$y = n - x$

Además:

$f(x) = xy = x(n - x)$

$f(x) = nx - x^2 \quad ...(I)$

Maximizando:

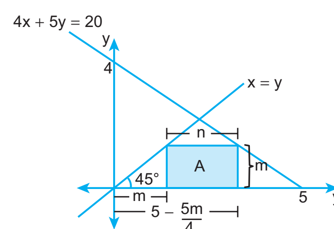
$f'(x) = n - 2x = 0$

$x = \dfrac{n}{2} \ \wedge \ y = \dfrac{n}{2}$

Clave A

30. Dato: $x = y \ \wedge \ 4x + 5y = 20$

Graficando:



$4x + 5y = 20$

$4x + 5m = 20 \Rightarrow x = 5 - \dfrac{5m}{4}$

Se observa que:

$n = 5 - \dfrac{5m}{4} - m = 5 - \dfrac{9m}{4} \quad ...(I)$

Nos piden:

$A(m) = n(m) \quad ...(II)$

(I) en (II):

$A(m) = \left(5 - \dfrac{9m}{4}\right)m$

$A(m) = 5m - \dfrac{9m^2}{4}$

Maximizamos:

$A'(m) = 5 - 2 \, . \, \dfrac{9}{4}m = 0$

$\therefore \ m = \dfrac{10}{9}$

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 104) Unidad 4

Comunicación matemática

1.

2.

Razonamiento y demostración

3. El numerador sigue una PA elevada al cuadrado y el denominador una PA.

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{(n+1)^2}{n}$$

$$: \quad a_{25} = \frac{26^2}{25}$$

Clave B

4. El término general es:

$$\sqrt[1+n]{3} = 3^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{1+n\to\infty} 3^{\frac{1}{n+1}} = 3^{\lim\limits_{n\to\infty} 1/n+1} = 3^0 = 1$$

Clave E

5.

Clave C

6. I. $\frac{1}{2}; \frac{4}{3}; \frac{9}{4}; \ldots\ a_n \geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ (acotada inferiromente)

II. $\frac{2}{3}; \frac{4}{1+2^2}; \frac{6}{1+2^3}; \ldots \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{1+2^n} = 0$

$\Rightarrow$ (acotada superiormente)

III. Acotada inferiormente.

IV. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2n}{1+n} = -2$

$\Rightarrow$ (acotada superiormente)

Clave D

Resolución de problemas

7. a; b; c (PA)

$\Rightarrow 2b = a + c$ ...(1)

Además:
$a+3$; $b+3$; $c+7$ es una PG
$(a+3)+(b+3)+(c+7) = 28$
$a+b+c+13 = 28$
$a+b+c = 15$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):
$3b = 15$
$\Rightarrow b = 5$

Como:
$a+3$; $b+3$; $c+7$ forman una PG

$\Rightarrow \frac{b+3}{a+3} = \frac{c+7}{b+3} \Rightarrow \frac{8}{a+3} = \frac{c+7}{8}$ ...(3)

De (1):
$a + c = 10 \Rightarrow a = 10 - c$ ...(4)

Reemplazando (4) en (3):
$64 = (a+3)(c+7)$
$64 = (10-c+3)(c+7)$
$64 = (13-c)(c+7)$

$0 = c^2 - 6c - 27$
c -9
c $+3$

$\Rightarrow c = 9 \vee c = -3$; $(c > 0)$
$\Rightarrow c = 9$

Reemplazando $c = 9$ en (4):
$\Rightarrow a = 1$

Por lo tanto: los números son: 1; 5 y 9

Clave D

8.

De la ecuación:

$$1 - \frac{6}{x} - \frac{135}{x^2} = 0$$

$x^2 - 6x - 135 = 0$
x   9
x -15
$x_1 = -9$
$x_2 = 15$

Del enunciado:
$t_1 + t_2 = |x_1 + x_2|$
$\underbrace{t_2}_{t_1 + r}$

$2t_1 + r = |-9 + 15|$
$2t_1 + r = 6$ ...(I)
$t_6 = t_1 + 5r = 21$ ...(II)

Resolvemos (I) $\wedge$ (II):
$\therefore r = 4$

Clave B

9. Datos:
$a_1 = 2$
$a_{23} = 156$

Sabemos que:
$a_{23} = a_1 + 22r$
$156 = 2 + 22r \Rightarrow r = 7$

Luego:
$a_4 = a_1 + 3r = 2 + 21 = 23$
$a_{35} = a_1 + 34r = 2 + 34(7) = 240$
Nos piden:
$a_4 + a_{35} = 263$

Clave E

Nivel 2 (página 104) Unidad 4

Comunicación matemática

10.

11. (8) Sucesión de Fibonacci.

($25x^2$) $a_n = n^2 x^2$

(U) L ; M ; Ñ ; Q ; U
– N OP RST

(38) $a_2 = 3a_1 + 5 = -1$
$a_3 = 3a_2 + 5 = +2$
$a_4 = 3a_3 + 5 = 11$
$a_5 = 3a_4 + 5 = 38$

12. $a_5 + a_6 = a_1 + 4r + a_1 + 5r$
$= 2a_1 + 9r$ ...(I)

$a_2 = 7$
$a_1 + r = 7$ ...(II)
$a_1 + 3r = 19$ ....(III)

De (III) y (II): $2r = 12$
$r = 6$
$a_1 = 1$

$\Rightarrow 2a_1 + 9r = 56$

Clave A

13. $a_n = 3; -9; 27; -3^4; \ldots$ (es oscilante)

Clave E

14. $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Clave C

15. Tomamos límites al infinito, $n > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^2+3}}{n+7}$$

Dividimos entre **n** al numerador y denominador:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{2n^2+3}}{n}}{\frac{n+7}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{3}{n^2}}}{1 + \frac{7}{n}}$$

Por propiedad de límites:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Clave D

16. Cuando tenemos límites, se puede formar el caso:

$$\lim_{n\to\alpha} a_n = \infty - \infty$$

$\Rightarrow$ Para levantar la indeteminación multiplicamos por la cojugada:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2-5n+6}-n\right)\left(\sqrt{n^2-5n+6}+n\right)}{\sqrt{n^2-5n+6}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-5n+6-n^2}{\sqrt{n^2-5n+6}+n} \text{ (dividimos } \div n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{6-5n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2-5n+6}+n}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{6}{n}-5}{\sqrt{1-\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}+1}$$

$$= \frac{-5}{2}$$

Clave B

17. $S = \frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{7}{32}+\frac{15}{128}+...$

$$S = \frac{2-1}{2}+\frac{2^2-1}{2^3}+\frac{2^3-1}{2^5}+\frac{2^4-1}{2^7}+...$$

$$S = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^7}...$$

Agrupando:

$$S = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+...\right)$$

Aplicamos suma límite:

$$\Rightarrow S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$\therefore S = 2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

Clave B

Resolución de problemas

18. Sea.

$:: 160 \; ... \; 5$ (4)

Sabemos que:

$$q = \sqrt[4+1]{\frac{5}{160}} = \frac{1}{2}$$

Luego:

:: 160; 80; 40; 20; 10; 5

Nos piden:

10 + 5 = 15

Clave D

19. Dato: $S_n = \frac{3}{2}(n+5)$

$n = 1 \Rightarrow S_1 = 9 = a_1$

$n = 2 \Rightarrow S_2 = 21 = a_1 + a_2$

$a_2 + 9 = 21 \Rightarrow a_2 = 12$

Luego:

$r = a_2 - a_1 = 3$

Dato: $S_m = m(m + 12)$

$S'_1 = 13 = a'_1$

$13 + a'_2 = 28 \Rightarrow a'_2 = 15$

Luego:

$r' = a'_2 - a'_1 = 15 - 13 = 2$

Además:

$a_n = a'_n$

$9 + (n-1)(3) = 13 + (n-1)(2)$

$n = 5$

Nos piden:

$a_n = a_5 = 9 + 4(3) = 21$

Clave D

20. x; y; z; w

Sea:

$t - r; t; t + r; w$ ...(α)

Dato:

$(t + r)^2 = tw$ ...(I)

$t - r + w = 14 \Rightarrow w = 14 + r - t$

$2t + r = 12 \Rightarrow r = 12 - 2t$ ...(II)

Reemplazando en (I):

$(t + 12 - 2t)^2 = t(14 + 12 - 2t - t)$

$(t - 12)^2 = t(26 - 3t)$

Desarrollando:

$2t^2 - 25t + 72 = 0$

$2t \quad -9 \quad t = 9/2$

$t \quad -8 \quad t = 8$

$\Rightarrow t = 8$

Reemplazando t = 8 en (II):

$\Rightarrow r = 12 - 2(8) = -4$

$\therefore x = t - r = 12$

Clave C

21. P.A.: a – r; a; a + r;...

Dato: $a - r + a + a + r = 15 \Rightarrow a = 5$

Luego: PA: 5 – r; 5; 5 + r

Sumamos: 1; 4; 19

$\Rightarrow$ PG: 6 – r; 9; 24 + r;...

Sabemos que:

$9^2 = (6 - r)(24 + r)$

Reduciendo:

$(r + 21)(r - 3) = 0$

$r = 3$

Luego la PG formada será:

:: 3; 9; 27

Nos piden:

$$q = \frac{9}{3} = 3$$

Clave C

Nivel 3 (página 105) Unidad 4

Comunicación matemática

22. I. $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2-4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{4}{n^2}} = 0$ (V)

II. (V)

III. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n+6}{2n^2-4n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}+\frac{6}{n^2}}{2-\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{3}{2}$ (F)

IV. (V)

V. $\frac{3^{2(3x-2)}}{3^{2x-1}} = \frac{3^{2x-1}}{3^{x/2}} \Rightarrow 3^{4x-3} = 3^{3x/2-1}$ (V)

$x = \frac{4}{5}$

23. I. $2x^2$; $2x^2 + 3$; $2x^2 + x + 1$; ...

Como es PA.

$2x^2 + x + 1 - (2x^2 + 3) = 2x^2 + 3 - (2x^2)$

$x - 2 = 3$

$x = 5$

II. $15 + 21 + 27 + 33 + ... + x = 576$

$$S = \left(\frac{15+x}{2}\right)n = 576$$

Pero: $n = \frac{x-15}{6} + 1$

$$\Rightarrow \frac{(x+15)(x-9)}{12} = 576$$

$(x + 15)(x - 9) = 12 \times 576$

$(x + 15)(x - 9) = \underbrace{72}_{x-9} \times \underbrace{96}_{x+15}$

$\Rightarrow x = 81$

III. $\frac{x}{6} = 1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{111 ... 11}_{20 \text{ cifras}}$

$$\frac{9x}{6} = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{9999 ... 99}_{20 \text{ cifras}}$$

$$\frac{3x}{2} = 10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + ... + 10^{20} - 1$$

$$\frac{3x}{2} = \underbrace{10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^{20}}_{PG} - 20(1)$$

$$\frac{3x}{2} = \frac{10(10^{20}-1)}{10-1} - 20$$

$$x = \frac{20(10^{20}-1)}{27} - \frac{40}{3}$$

Razonamiento y demostración

24. Dividimos al numerador y denominador $(\div\sqrt{n})$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{2n+\sqrt{n}+\sqrt{3n}}}{\sqrt{n}}}$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2+\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{3n}}}{n}}}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{\dfrac{1}{n}+\sqrt{\dfrac{3}{n^3}}}}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Clave C

25. $9S = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{999 ... 99}_{20 \text{ cifras}}$

$9S = \underbrace{10-1}_{10} + \underbrace{100-1}_{10^2} + \underbrace{1000-1}_{10^3} + ... + \underbrace{1000...00-1}_{10^{20}}$

Agrupando:

$9S = \underbrace{10^1 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^{20}}_{} - 20(1)$

PG: $q = 10$
$a_1 = 10$
$n = 20$

$9S = \dfrac{10(10^{20}-1)}{10-1} - 20$

$S = \dfrac{10(10^{20}-1)}{81} - \dfrac{20}{9}$

$\Rightarrow S + \dfrac{20}{9} = \dfrac{10^{21}-10}{81}$

Clave D

26. Piden:

$\underbrace{\sum_{k=1}^{12} k}_{} + \underbrace{\sum_{k=1}^{12} k^2}_{}$

$\underbrace{1+2+3+...+12}_{} + \underbrace{1^2+2^2+3^2 ... 12^2}_{}$

$\dfrac{(n)(n+1)}{2} + \dfrac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}$

$\dfrac{(12)(13)}{2} + \dfrac{(12)(13)(25)}{6}$

$\underbrace{78 + 650}_{728}$

Clave E

27. $S_{21} = a_1 + a_2 + ... + a_{20} + a_{21}$

Luego:

$S_{21} = S_{20} + a_{21}$

$21\left(\dfrac{7.21+1}{2}\right) = 20\left(\dfrac{7.20+1}{2}\right) + a_{21}$

$1554 = 1410 + a_{21} \qquad \therefore a_{21} = 12^2$

Clave B

28. Como:

$a^2(b+c)$; $b^2(a+c)$ y $c^2(a+b)$ están en PA.

$\Rightarrow 2b^2(a+c) = a^2(b+c) + c^2(a+b)$

Operando convenientemente:

$ab(a-2b) + ac(a+c) + bc(c-2b) = 0 \quad ...(1)$

Además: $M = \dfrac{a+c}{b} \Rightarrow Mb = a + c \quad ...(2)$

Reemplazando (2) en (1):

$ab(a-2b) + abc(M) + bc(c-2b) = 0$

$a(a-2b) + acM + c(c-2b) = 0$

$a^2 - 2ab + acM + c^2 - 2bc = 0$

$a^2 + c^2 + acM = 2b(a+c)$

De (2):

$Mb = a + c$

$\Rightarrow (M^2b^2 - 2ac) + acM = 2b(bM)$

$Mb^2(M-2) + ac(M-2) = 0$

$(M-2)[Mb^2 + ac] = 0$

$\Rightarrow M = 2 \ \wedge \ M = \dfrac{-ac}{b^2}$

Por lo tanto, una solución es 2.

Clave C

Resolución de problemas

29. Datos:

PA: $\dfrac{1}{a}; \dfrac{1}{b}; \dfrac{1}{c}$

$\dfrac{1}{b} = \dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}}{2} \Rightarrow b = \dfrac{2ac}{a+c} \quad ...(I)$

PA: $a; (b+1); c \Rightarrow 2(b+1) = a + c \quad ...(II)$

(II) en (I): $b(b+1) = ac \quad ...(III)$

PG: $(a - \frac{1}{2}) : b : c \Rightarrow b^2 = \left(a - \dfrac{1}{2}\right)c$

$b^2 = ac - \dfrac{1}{2}c \quad ...(IV)$

(III) en (IV):

$b^2 = b^2 + b - \dfrac{1}{2}c \Rightarrow c = 2b \quad ...(\alpha)$

(α) en (I): $b = \dfrac{2a(2b)}{a+2b}$

$a + 2b = 4a \Rightarrow a = \dfrac{2}{3}b \quad ...(\beta)$

(α) y (β) en (IV):

$b^2 = \left(\dfrac{2}{3}b\right)(2b) - b \Rightarrow b = 3$

Luego: $c = 2b = 6$

$a = \dfrac{2}{3}(3) = 2$

Nos piden: $a + b + c = 11$

Clave E

30. Si $\log r = -1 \Rightarrow r = \dfrac{1}{10}$

$\log a = 7 \Rightarrow a = 10^7$

$t_k = t_1 \cdot r^{k-1} = r$

$10^7(10^{-1})^{k-1} = 10^{-1}$

$10^{7-k+1} = 10^{-1}$

$\Rightarrow 8 - k = -1$

$\therefore k = 9$

Clave D

31. $a; aq; aq^2$ (PG)

$a(1 + q + q^2) = 70$ (dato) $\quad ...(1)$

Luego:

$4a; 5aq; 4aq^2$ (PA)

$\Rightarrow r = 5aq - 4a = 4aq^2 - 5aq$

$10aq - 4a = 4aq^2$

$10q - 4 = 4q^2$

$\Rightarrow 0 = 2q^2 - 5q + 2$

$2q \quad -1$
$q \quad -2$

$(2q-1)(q-2) = 0$

$\Rightarrow q = \dfrac{1}{2} \ \vee \ q = 2$

Reemplazando en (1):

Si $q = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = 40$

Si $q = 2 \Rightarrow a = 10$

En ambos casos se tiene la PG inicial:
10; 20; 40.

El mayor de ellos es: 40

Clave D

MARATÓN MATEMÁTICA
(página 107) Unidad 4

1. I. V

II. V

III. F: $\text{Ran}(F + 3) \in [-4; 8]$

IV. V

Clave B

2. Factorizamos completando cuadrados:

$f(x) = -2(\underbrace{x^2 + 6x + 9}_{(x+3)^2} - 9)$

$f(x) = -2(x + 3)^2 + 18$

Si: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x + 3)^2 \geq 0$

$\Rightarrow -2(x + 3)^2 \leq 0$

$-2(x + 3)^2 + 18 \leq 18$

$\therefore f(x) \leq 18$

Clave D

3. La serie es:

$3; 3 + 6 + 9; 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + ... + f_{10}$

$\downarrow$ 1 térm. $\quad \downarrow$ 3 térm. $\quad \downarrow$ 6 térm.

$1 \qquad \underbrace{1 + 2} \qquad \underbrace{1 + 2 + 3} \qquad \underbrace{1 + 2 + 3 + ... + 10}$

$\frac{(10)(11)}{2} = 55$ términos

$\Rightarrow$ La suma de términos del f_{10}:

$\underbrace{3 + 6 + 9 + 12 \,...}_{55 \text{ términos}}$

$S_{55} = \frac{(a_{55} + a_1)}{2}n; \; a_{55} = 3 + (54)3$

$\Rightarrow a_{55} = 165$

$\Rightarrow S_{55} = \frac{(3 + 165)55}{2} = 4620$

Clave D

4. Empleamos las fórmulas de PG:

$t_n = t_1 q^{n-1}$

$\Rightarrow \; t_4 = t_1 q^{4-1} = 4 = 2^2 \qquad ...(I)$

$\Rightarrow \; t_{11} = t_1 q^{11-1} = 512 = 2^9 \qquad ...(II)$

$(II) \div (I) \Rightarrow \frac{q^{10}}{q^3} = \frac{2^9}{2^2} \Rightarrow q^7 = 2^7 \Rightarrow q = 2$

Reemplazamos en (I):

$\Rightarrow t_1 2^{4-1} = 4$

$\therefore t_1 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Clave B

5. De la sucesión:

$(x)^{2x}; (8x)^{3x}; (27x)^{4x}; ...$

$(1^3x)^{2x}; (2^3x)^{3x}; (3^3x)^{4x}; ...$

Se observa que: $a_n = (n^3x)^{(n+1)x}$

Clave D

6. $a_1 = B^{1/3} \qquad a_2 = B^{\frac{1/3 + 1}{3}} \qquad a_3 = B^{\frac{\frac{1/3+1}{3} + 1}{3}}$

$a_1 = B^{1/3} \qquad a_2 = B^{\frac{3+1}{3^2}} \qquad a_3 = B^{\left(\frac{1+3+3^2}{3^3}\right)}$

$a_n = B^{\left(\frac{1+3+3^2+...+3^{n-1}}{3^n}\right)}$

$a_n = B^{\frac{1}{3^n}(1+3+3^2+...+3^{n-1})}$

$a_n = B^{\frac{1}{3^n}\left(\frac{3^n - 1}{2}\right)} = B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2.3^n}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n = B^{\frac{1}{2}}$, pues $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2.3^n} = 0$

Clave D

7. $a_n: 5^2; 6^2; 7^2; ...$

$a_n: (n + 4)^2$

Piden:

$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{10}$

$S_k = 5^2 + 6^2 + 7^2 + ... + 14^2$

Sabemos:

$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\Rightarrow S_k = \underbrace{1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 + ... + 14^2}_{\frac{(14)(15)(29)}{6}} - \underbrace{(1 + 2^2 + 3^2 + 4^2)}_{30}$

$\therefore S_k = 985$

Clave C

8. f(x) es función constante $\Rightarrow f(x) = kx$

Del dato: $f(1) + f(3) = 24$ (evaluamos)

$k(1) + k(3) = 24$

$4k = 24$

$k = 6$

$\Rightarrow f(x) = 6x$

$y = 6x$

Para determinar la inversa ponemos a x en función de y.

$\Rightarrow x = \frac{y}{6}$, cambiamos las variables

$\Rightarrow f^*(x) = \frac{6}{x} \qquad \therefore f^*(6) = \frac{6}{6} = 1$

Clave E

9. Sabemos que $\ln a \in \mathbb{R}$, si $a > 0$.

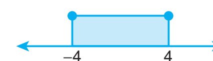
$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} + 1 > 0}_{x \in \mathbb{R}} \quad \wedge \quad 1 - \frac{x^2}{16} \geq 0$

$\wedge \quad \frac{x^2}{16} \leq 1$

$x^2 \leq 16$

$|x| \leq 4$

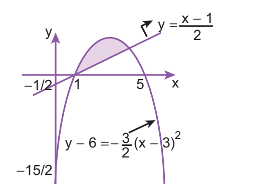
$-4 \leq x \leq 4$



Intersecando: $\therefore x \in [-4; 4]$

Clave C

10.



Clave D